

METHODS IN COMPUTATIONAL  
PHYSICS

Advances in Research and Applications

*Edited by*

BERNI ALDER  
*Lawrence Radiation Laboratory  
Livermore, California*

SIDNEY FERNBACH  
*Lawrence Radiation Laboratory  
Livermore, California*

MANUEL ROTENBERG  
*University of California  
La Jolla, California*

Volume 9  
**PLASMA PHYSICS**

ACADEMIC PRESS  
NEW YORK AND LONDON  
1970

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ  
В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ**

Под редакцией  
Б. ОЛДЕРА, С. ФЕРНБАХА и М. РОТЕНБЕРГА

Перевод с английского  
Под редакцией  
доктора физ.-мат. наук, профессора  
Ю. Н. ДНЕСТРОВСКОГО  
и  
доктора физ.-мат. наук, профессора  
Д. И. КОСТОМАРОВА

Издательство «Мир»  
МОСКВА 1974

Предлагаемая книга является первой в мировой литературе монографией по вычислительным методам в физике плазмы. Основное внимание уделено различным методам решения самосогласованной системы уравнений Власова и Пуассона для одно- и двухкомпонентной плазмы. Подробно изложен метод укрупненных частиц. Каждый раздел посвящен моделированию плазмы со ступенчатой плотностью.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и вузов, работающих в области физики плазмы, астрофизики и физики твердого тела и интересующихся современными методами моделирования сложных систем.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

«Вероятно, нет другой такой области физики, в которой была бы яснее необходимость моделирования на ЭВМ, чем в физике плазмы», — такими словами начинают авторы одну из глав этой книги, и с ними нельзя не согласиться. За последнее десятилетие создание и исследование математических моделей плазменных процессов стало, по существу, самостоятельной частью физики плазмы. Количество работ в этой области исчисляется уже многими десятками. Каждый научный центр считает необходимым иметь группу по моделированию плазмы. Непрерывно появляются новые идеи по постановке задач, методам расчета, развитию различных схем. Накоплен опыт по решению больших задач на ЭВМ с фалтастическим объемом перерабатываемой информации. Растет число специализированных совещаний и симпозиумов. На традиционных конференциях заметную часть составляют доклады по моделированию плазмы.

В этих условиях вполне назрело подведение первых итогов, обзор используемых идей и методов, оценка имеющихся возможностей. Предлагаемая книга является первой в мировой литературе попыткой решить эту задачу. Как и другие тома серии «Методы вычислительной физики», она представляет коллективную монографию. Неизбежность некоторого дублирования при этом вполне откупается многосторонним характером оценки применяемых методов.

Основная часть книги посвящена различным аспектам численного решения кинетического уравнения Власова. В главах 1 и 4—6 рассмотрен метод укрупненных частиц, теперь уже ставший классическим. Этот метод в настоящее время наиболее апробирован. В последние годы с его помощью решен ряд двумерных и даже трехмерных задач. Для широкого круга проблем он является экономичным с точки зрения затрат машинного времени. Существенным для метода являются вопросы о числе частиц и размере разностной сетки, необходимых для правильной передачи физики явления. Эти вопросы подробно исследуются в главах 1 и 4.

В главах 2, 3 и 7 рассмотрены другие прямые методы решения уравнения Власова. Разложения решения по системе базисных функций (разложения Фурье и Эрмита) используются с начала



шестидесятых годов. С помощью этого метода решен ряд одномерных задач, однако его дальнейшее распространение наталкивается на ряд трудностей. Вариации метода и различные способы преодоления трудностей изложены в главе 2. Сравнительно новой является модель «водяного мешка», предлагаемая в главе 3. Суть метода заключается в замене непрерывной функции распределения на кусочно-постоянную и в прослеживании движения разрывов. Комбинируя этот метод с методом укрупненных частиц, можно существенно снизить число частиц и объем вычислений. Конечно-разностный метод на зейлеровой сетке пока еще не вылучил широкого распространения из-за трудностей с устойчивостью счета. Некоторые примеры имеющихся программ описаны в главе 7.

Оригинальной по идеям является глава 8, в которой развивается вариационная формулировка задач для бесстолкновительной плазмы. Следует ожидать в ближайшие годы численной реализации этого метода.

Последние главы посвящены моделированию плазмы со столкновениями. В главе 9 дан подробный обзор равностных методов, используемых в гидродинамической модели плотной плазмы. Наконец, в главе 10 на примере плазмы в пробиротроне анализируются техника решения двумерного уравнения Лапласа — Фокера — Шланка. Первые обсуждаются проблема учета зависимости функции распределения от продольной пространственной координаты («квазирежимная» задача). Расчеты подобного рода важны для учета влияния электрического поля в пробиротроне.

Советская литература по численному моделированию плазмы совершенно не отражена в книге, хотя первые работы появились у нас более десяти лет назад. Список работ советских авторов, частично восполняющий этот пробел, приведен ниже.

Быстрое развитие вычислительной физики привело к появлению большого числа новых терминов. Возникающие в связи с этим трудности при переводе разрешались нами с учетом мнения советских ученых, работающих в этой области. В ряде случаев мы не рисковали изобретать новые термины, а использовали булвальный перевод с английского, что, несомненно, не является лучшим выходом. Поэтому мы заранее приносим извинения за неуклюжесть некоторых терминов и будем благодарны за конструктивную критику.

За время, прошедшее после выхода книги, появилось много новых материалов. С одной стороны, продолжают развиваться традиционные идеи и направления. С другой стороны, быстро расширяется круг рассматриваемых задач и используемых моделей. Отметим некоторые тенденции в моделировании плазмы с помощью метода укрупненных частиц.

1) Решаются задачи, для которых характерно наличие нескольких пространственных и временных шкал. Наиболее важными

из них являются задачи о турбулентном сопротивлении плазмы и о бесстолкновительных ударных волнах.

2) Исследуются столкновительные эффекты, определяющие процессы переноса в плазме.

3) Разрабатываются программы с полным описанием электромагнитных процессов, включая излучение.

Сосем недавно в двумерной модели удалось получить величину аномального сопротивления турбулентной плазмы, которая приближается к экспериментальному значению.

К наиболее важным новым задачам, связанным с моделированием процессов в высокотемпературной плазме, следует отнести задачи по исследованию баланса энергии и частиц в установках типа «Токамак» и установках с быстрым нагревом плазмы за счет энергии лазерного излучения или пучка релятивистских электронов. Расчеты по нагреву плазмы в токамаках были начаты после Третьей международной конференции по физике плазмы и контролируемому синтезу (Новосибирск, 1968 г.) по инициативе академика Л. А. Арцимовича. В настоящее время во всех крупных лабораториях, имеющих или строящих такие установки, созданы группы, проводящие соответствующие расчеты. В приложениях к русскому переводу книги дано описание используемых при этом моделей и математических методов. К сожалению, второй круг задач остался в этой книге совершенно незатронутым.

Перевод книги выполнен И. С. Байковым (предисловие, главы 1, 2, 5, 6), Г. В. Переверзевым (главы 4, 7, 9) и Л. Г. Деденко (главы 3, 8, 10). Большую помощь в переводе и редактировании главы 7 оказал В. И. Телетип.

Июль 1973 г.

Ю. П. Днестровский  
Д. П. Костомаров

#### ЛИТЕРАТУРА

##### Уравнение Власова

- Масленников М. В., Сивов Ю. С., ДАН СССР, 459, 4013 (1964).  
 Евальский В. А., Ижменник В. С., ПМТФ, № 1, 3 (1965).  
 Гельфанд И. М., Звеза Н. М., Ижменник В. С., Логуцкий О. В.,  
 Рибельский В. С., Халил Л. Г., ЖЭМ и МФ, 7, 322 (1967).  
 Телетип В. И., Вестник МГУ, № 5, 25 (1968).  
 Сивов Ю. С., ДАН СССР, 192, 534 (1970).  
 Сивов Ю. С., Хобанцев К. В., Ходырев Ю. В., ДАН СССР, 207, 75 (1972).

##### Уравнение Лапласа—Фокера—Шланка

Днестровский Ю. П., Костомаров Д. П., Nucl. Fusion, 11, 141 (1971).

## Гидродинамическое приближение. Разреженная плазма

Днепровский Ю. П., Костомаров Д. П., Телегин В. И., Попов Д. А.,  
 Чудинов В. А., *Вязкая физика*, **11**, 661 (1968).  
 Гуревич А. В., Днепровский Ю. П., Костомаров Д. П., Гаушки Э. А., *ЖТФ*,  
**41**, 572 (1974).

## Гидродинамическое приближение. Плотная плазма

Дьяченко В. Ф., Имищенко В. С., *ЖВМ и МФ*, **3**, 945 (1963).  
 Дьяченко В. Ф., Имищенко В. С., *ПММ*, **29**, 993 (1965).  
 Брушлинский К. В., Яценко Н. М., Морозов А. И., Изв. АН СССР, сер. «Механика», № 5, **3** (1965).  
 Брушлинский К. В., Герасим Н. И., Морозов А. И., Изв. АН СССР, сер. МЭТ, № 2, **189** (1966).  
 Титов А. П., Самарский А. А. и др., *ДАН СССР*, **173**, 808 (1967).  
 Дьяченко В. Ф., Имищенко В. С., в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 5, Атомиздат, 1967, стр. 394.  
 Брушлинский К. В., Герасим Н. И., Морозов А. И., *Магнитная гидродинамика*, № 1, **3**; № 2, **31** (1967).  
 Самарский А. А. и др., *ЖВМ и МФ*, **8**, 1025 (1968).  
 Брушлинский К. В., *ЖВМ и МФ*, **8**, 1039 (1968).  
 Велихов Е. П., Дестарев Л. М., Самарский А. А., Физический А. П., *ДАН СССР*, **184**, 578 (1969).  
 Дьяченко В. Ф., Имищенко В. С., *ЖЭТФ*, **56**, 1766 (1966).  
 Имищенко В. С., Остроушко И. В., Рабенович В. С., Осоев С. М., Ходяков К. Л., *Nucl. Fusion*, **9**, 307 (1969).  
 Самарский А. А., *Поведение в теории разнородных слоев*, изд-во «Наука», 1971.  
 Самарский А. А. и др., *ДАН СССР*, **206**, 307 (1972).  
 Гоальдин В. Я., Четвериков В. П., *ЖВМ и МФ*, **12**, 990 (1972).  
 Днепровский Ю. П., Костомаров Д. П., Попов Д. А., *ЖТФ*, **42**, 2255 (1972).  
 Брушлинский К. В., Морозов А. И., Палевак В. В., в сб. «Плазменные ускорители», изд-во «Машинное строительство», 1975, стр. 254.

ПРЕДИСЛОВИЕ  
 К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Интерес к физике плазмы сильно возрос за два последних десятилетия из-за задач, связанных с программой использования энергии управляемого термоядерного синтеза и изучения магнитного поля в околоземном пространстве. В обеих областях эксперименты сложны и дороги и, следовательно, весьма желательны результаты, полученные теоретически. Поскольку теоретическое изучение плазмы связано с решением очень сложной математической задачи о коллективном поведении многих заряженных частиц, ЭВМ становится важным средством решения уравнений, хотя сами вычисления оказываются весьма сложными. Это справедливо по отношению к любой из двух моделей, которые разрабатывались: к методу укрупненных частиц и к методу решения уравнений непрерывности.

Метод частиц является гибким, но требует много машинного времени. Одномерный вариант этого метода дается в главе Доусона, двумерные варианты описаны в главах Хокки, Мора и Бердсола с соавторами. Последовательное решение уравнений движения отдельных заряженных частиц при наличии магнитного и электрического полей дает детальную информацию о поведении плазмы, включая неустойчивые случаи. С другой стороны, методы, использующие непрерывное описание, позволяют проводить вычисления, результаты которых согласуются с экспериментами на плазменных установках, с меньшими затратами машинного времени и с использованием реалистических граничных условий. Это в частности, справедливо в задачах, в которых определяющую роль играют столкновения, как показано в главах Робертса и Поттера, а также Киллина и Маркса. В общем случае метод расчета, который используется в непрерывных моделях, представляет собой метод конечных разностей для уравнений типа гидродинамических,

усложненных наличием магнитного и электрического полей. В бесспорно важном случае (случай Власова) в одномерных задачах были использованы также два специальных метода, описанные в главах Армстронга с соавторами и Берка и Роберта.

Дальнейшее совершенствование численных методов и вычислительных машин должно привести к еще более правдоподобному моделированию плазмы, включая трехмерные расчеты. К сожалению, применение описанных выше численных методов к близким по характеру задачам динамики звезд не могло быть включено из-за ограниченного объема книги.

Январь 1970

*Берни Олбер  
Сидни Фербах  
Мануэль Ротенберг*

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКИХ ЛИСТОВ ДЛЯ ПЛАЗМЫ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

*Дж. Доусон\**

### § 1. Введение

Модель плоских листов — одна из наиболее старых и гибких одномерных моделей для численного исследования плазмы. Впервые она была применена для исследования электростатических эффектов, плазменных колебаний, кинетики одномерной плазмы и двухпотенциальной неустойчивости [1—5]. В этой главе мы обсудим электростатическую модель плоских листов. Основное внимание будет уделено методам решения этих проблем на ЭВМ в ряду трудностей, которые при этом встречаются (например, шуму). Однако реальные программы приводиться не будут.

Позднее модель плоских листов была модифицирована для того, чтобы допустить наряду с перпендикулярным движением движение в плоскости самих листов [6—8]. Эта модификация позволяет исключить магнитные эффекты и эффект соударений в приближении Фоккера — Планка (используя метод Монте-Карло). На основе таких модификаций были изучены циклотронные волны [6], эффект палачения [8] и неустойчивости типа Харриса (см. [9]), связанные с моноэнергетическими распределениями по скоростям. Хотя эти последние модификации весьма интересны и разнообразны, мы не будем их здесь рассматривать, поскольку это увело бы нас слишком далеко.

### § 2. Электростатическая модель плоских листов

Имеются две электростатические модели плоских листов: однокомпонентная и двухкомпонентная. В однокомпонентной модели (Доусон [2]) рассматривается плазма, состоящая из большого числа тождественных заряженных плоских листов, помещенных в неподвижный однородный нейтрализующий фон (фиг. 1). Предполагается, что все плоские листы всегда перпендикулярны какой-то оси  $x$ , но могут свободно двигаться вдоль нее. Считается, что они свободно проходят друг через друга.

Двухкомпонентная модель [4, 5] включает как положительно, так и отрицательно заряженные листы. Снова предполагается,

\* John M. Dawson, Princeton University, Plasma Physics Laboratory, Princeton, New Jersey.

усложненных магнитным и электрическим полями. В бесспорном случае (случай Власова) в одномерных задачах были использованы также два специальных метода, описанные в главах Армстронга с соавторами и Берка и Роберта.

Дальнейшее совершенствование численных методов и вычислительных машин должно привести к еще более правдоподобному моделированию плазмы, включая трехмерные расчеты. К сожалению, применение описанных выше численных методов к близким по характеру задачам динамики звезд не могло быть включено из-за ограниченного объема книги.

Январь 1970

*Берни Олвер  
Сидни Фернбах  
Мануэль Ротенберг*

## ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛОСКИХ ЛИСТОВ ДЛЯ ПЛАЗМЫ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЯ ДЛЯ ЧАСТИЦ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА

*Дж. Даусон\**

### § 1. Введение

Модель плоских листов — одна из наиболее старых и гибких одномерных моделей для численного исследования плазмы. Впервые она была применена для исследования электростатических эффектов, плазменных колебаний, кинетики одномерной плазмы и двухпотенциальной неустойчивости [1—5]. В этой главе мы обсудим электростатическую модель плоских листов. Основное внимание будет уделено методам решения этих проблем на ЭВМ и ряду трудностей, которые при этом встречаются (например, шуму). Однако реальные программы приводиться не будут.

Позднее модель плоских листов была модифицирована для того, чтобы допустить наряду с перпендикулярным движением движение в плоскости самих листов [6—8]. Эта модификация позволяет исключить магнитные эффекты и эффект соударений в приближении Фоккера — Планка (используя метод Монте-Карло). На основе таких модификаций были изучены циклотронные волны [6], эффект излучения [8] и неустойчивости типа Харриса (см. [9]), связанные с моноэнергетическими распределениями по скоростям. Хотя эти последние модификации весьма интересны и разнообразны, мы не будем их здесь рассматривать, поскольку это увело бы нас слишком далеко.

### § 2. Электростатическая модель плоских листов

Имеются две электростатические модели плоских листов: однокомпонентная и двухкомпонентная. В однокомпонентной модели (Даусон [2]) рассматривается плазма, состоящая из большого числа тождественных заряженных плоских листов, помещенных в неподвижный однородный нейтрализующий фон (фиг. 1). Предполагается, что все плоские листы всегда перпендикулярны какой-то оси  $x$ , но могут свободно двигаться вдоль нее. Считается, что они свободно проходят друг через друга.

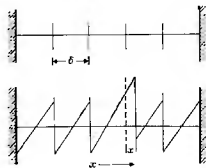
Двухкомпонентная модель [4, 5] включает как положительно, так и отрицательно заряженные листы. Снова предполагается,

\* John M. Dawson, Princeton University, Plasma Physics Laboratory, Princeton, New Jersey.

что плоские листы всегда перпендикулярны какой-либо оси  $x$  и могут свободно двигаться только в  $x$ -направлении. Допускается, что они свободно проходят друг через друга. Заряды на листах равны и противоположны по знаку, но их массы выбираются равными. Вообще говоря, отношение масс не берется таким большим, как 2000 : 1, так как в последнем случае ЭВМ истратит все свое время на вычисление того, что делают быстро движущиеся электроны. Как правило, используют отношения масс в интервале от 10 до 100, а затем пытаются пересчитать результаты для реального отношения масс.

Начнем с обсуждения однокомпонентной модели.

#### 1. Однокомпонентная модель



Фиг. 1. Модель плоских листов.

$$\sigma = -\nu_0 e \delta, \quad M = \nu_0 m_0 \delta,$$

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi e^2 \nu_0}{m} x$$

В однокомпонентной модели существует равновесное состояние, когда листы покоятся. В этом равновесном состоянии листы равномерно распределены в пространстве и среднее электрическое поле, действующее на лист, равно нулю (см. фиг. 1). У каждого листа электрическое поле претерпевает скачок на  $-4\pi\sigma$  (закон Гаусса), где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Между листами электрическое поле меняется линейно с расстоянием из-за заряда фона. Расстояние между листами в равновесии,  $\delta$ , равно  $m_0^2$ , где  $\nu_0$  — плотность нейтрализующего фона.

Если один из листов (скажем, лист  $i$ ) смещен из равновесного положения на расстояние  $x_i$ , то он пересечет положительный заряд  $\sigma_+ x_i$  на единицу площади. По закону Гаусса действующее на лист электрическое поле равно  $4\pi\nu_0\sigma_+ x_i$ , а его движение описывается уравнением

$$m_i \ddot{x}_i = -\sigma E = -4\pi\nu_0\sigma^2 x_i$$

или

$$\ddot{x}_i = -\omega_p^2 x_i, \quad (1)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\nu_0\sigma^2}{m}$$

Легко видеть, что (1) есть уравнение гармонического осциллятора, так что

$$x_i(t) = x_i(0) \cos \omega_p t + \frac{\dot{x}_i(0)}{\omega_p} \sin \omega_p t, \quad (2)$$

$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_i(0) \cos \omega_p t - \omega_p x_i(0) \sin \omega_p t. \quad (3)$$

Каждый лист осциллирует с плазменной частотой независимо от всех других.

Уравнение (1) и определяемое формулами (2) и (3) решение выполняются только, если выбранный лист не пересекает другого. Если же произошло какое-то пересечение, то электрическое поле скачком изменится на  $-4\pi\sigma$  и ускорение тоже испытывает внезапный скачок. Ситуация такая же, как если бы листы поминуты поочередно равновесия. Поэтому уравнение движения листа принимает вид

$$\ddot{x}_i = -\omega_p^2 X_i, \quad (4)$$

где  $x_i$  — координата листа, а  $X_i$  — смещение его от мгновенного положения равновесия.

Теперь можно построить другую одномерную модель плазмы, которая полностью эквивалентна только что описанной. Предположим, что вместо листов, свободно проходящих друг через друга, мы имеем идеально упругие листы. В одномерном случае при совершенно упругих столкновениях идентичные частицы просто обмениваются скоростями. Последнее приводит к той же ситуации, которая возникает для частиц, проходящих друг через друга. Единственное отличие между описанными результатами заключается в именах, которые мы присваиваем частицам.

Можно построить механическую модель одномерной плазмы. Модель состоит из набора идентичных маятников, каждый из которых имеет упругий шарик на конце. Маятники выстроены в линию и могут осциллировать только вдоль этой линии центров.

С помощью этой модели можно продемонстрировать ряд свойств одномерной плазмы. Например, если первый маятник отвести в сторону и освободить так, чтобы он смог ударить второй, то он передаст свою скорость второму, второй — третьему и т. д. Таким образом, импульс движется через маятники. Когда какой-то маятник ударит соседа, он теряет свою скорость, но не свое смещение. Таким образом, импульс оставляет маятник после себя в смещенном состоянии, и маятники начинают колебаться. Это эквивалентно возбужденно колебаний плазмы при движении быстрого листа через плазму.

## 2. Численный метод описания движения однокомпонентной одномерной плазмы

Будем искать решения уравнения (4) для листов, корректируя орбиту для пересечения с соседними листами. Когда лист пересекает соседний, ускорение претерпевает скачок,

$$\Delta \ddot{x} = \pm \omega_p^2 \delta, \quad (5)$$

где  $\delta$  — расстояние между частицами в исходном равновесии; знак плюс выбирается, если пересекаемый лист вначале находился справа, а минус, если слева.

Допустим, что частицы пронумерованы в соответствии с их положением вдоль оси  $x$ . Если не происходит пересечения, то решение уравнения (4) имеет вид

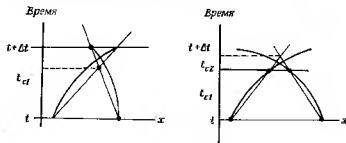
$$\dot{x}_i(t + \Delta t) = \dot{x}_i(t) \cos \omega_p \Delta t - \omega_p X_i(t) \sin \omega_p \Delta t, \quad (6)$$

$$x_i(t + \Delta t) = \dot{x}_i(t) \sin \omega_p \Delta t + X_i(t) (1 - \cos \omega_p \Delta t). \quad (7)$$

Код вычисляет эти непересекающиеся положения и проверяет, не произошло ли какое-либо пересечение. т. е. он разыскивает ситуации, когда

$$x_i(t + \Delta t) > x_j(t + \Delta t) \text{ для } j > i. \quad (8)$$

(Напомним, что частицы пронумерованы вдоль оси  $x$ .) Если он находит, что такое пересечение произошло, он вычисляет время



Фиг. 2. Схема пересечения.

пересечения, определяя сначала хорды двух орбитальных кривых в плоскости  $x, t$ , а затем вычисляя времена пересечений для них (фиг. 2). Первое приближение для времени пересечения  $t_{c1}$  записывается в виде

$$\Delta t_{c1} = \Delta t \frac{x_j(t) - x_i(t)}{x_j(t) - x_i(t) + x_i(t + \Delta t) - x_j(t + \Delta t)}. \quad (9)$$

Далее код вычисляет, исходя из непересекающихся орбит, продолжения этих двух частиц в предсказанный момент пересечения. Затем он вычисляет хорды, проведенные через эти точки в моменты  $t$  и  $t_{c1}$ , и определяет их время пересечения  $t_{c2}$ . Это время используется как правильное время пересечения. Вклад от более ранних пересечений (если таковые были) в течение  $\Delta t$  не включается. Если две частицы пересеклись до момента  $t$  из-за поправки к их орбитам от пересечений в предшествующий временной интервал, то  $t_{c2}$  будет отрицательным и метод найдет поправку. Орбиты частиц корректируются путем добавления постоянного ускорения  $\pm \omega_p^2 \delta$  к их движению на протяжении остальной части временного шага, причем знак зависит от порядка пересечения.

В первоначальном варианте этого кода движения вычислялись без учета поправок для пересечений в течение  $\Delta t$ . И даже при временных шагах, настолько коротких, что вероятность пересечения одним листом другого мала, было обнаружено, что энергия убывала с недопустимой скоростью, приблизительно как

$$\left( \frac{\Delta E}{E} \right)_{\text{за } \omega_p^{-1}} = \omega_p \Delta t, \quad (10)$$

где  $\Delta t$  — временной шаг. Эта скорость довольно велика, кроме того, точность имеет только первый порядок относительно  $\Delta t$ . Благодаря включению первой поправки для пересечения закон сохранения энергии выполняется с большей точностью,  $\sim \Delta t^2$ , и это примерно на три порядка лучше для  $\omega_p \Delta t = 0,05$  и  $n_{Dp} = 40$ . Введя вторую поправку для времени пересечения, мы получили дальнейшее улучшение выполнения закона сохранения энергии на два порядка для  $\omega_p \Delta t = 0,05$  и  $n_{Dp} = 40$ . Увеличение рабочего времени из-за этой последней поправки оказалось незначительным ( $\sim 1\%$ ) и с избытком окуталося возможностью использовать большие временные шаги при заданной точности.

Помимо с проверкой сохранения энергии ранний вариант кода без второй поправки для времени пересечения проверялся на обратимость во времени. Движение системы из 9 листов было обращено, и мы обнаружили повторение траектории системы с точностью до  $10^{-8}$  (все орбиты имели эту точность) в течение 6 колебаний ( $\omega_p t = 36$ ). В этом случае на дебаевской длине находилось примерно 2,5 частицы.

Если частицы пронумерованы в том порядке, в котором они встречаются на оси  $x$ , то при проверке на пересечения нам нужно проверять только соседние в таблице частицы (т. е. соседние на оси  $x$  частицы). Существует максимальное расстояние по  $x$ , при котором частицы еще могут сталкиваться на протяжении временного шага. Это расстояние определяется формулой

$$\Delta x_{\text{макс}}(t) = |u_{-\text{макс}} + v(t)| \Delta t, \quad (11)$$

где  $\Delta x_{\text{макс}}(i)$  — максимальное расстояние, на котором мы должны искать впереди пересечение с  $i$ -й частицей;  $-v_{\text{макс}}$  есть максимальная отрицательная скорость частицы;  $v(i)$  — скорость  $i$ -й частицы и  $\Delta t$  — временной шаг. Мы ищем столкновения только впереди (по  $x$ ), так как столкновения сзади были выявлены ранее, по мере движения через таблицу. Максимальная отрицательная скорость сбрасывается каждый период  $\omega_p^{-1}$ .

Для того чтобы этот метод был эффективным, частицы должны быть приведены в порядок в соответствии с их положением вдоль оси  $x$ . Это производится подсчетом числа случаев, когда лист пересекает другой справа от себя, и вычитанием из него числа случаев, когда он пересекается другим слева. Полученное количество дает число мест, на которое нужно передвинуть частицу вперед (или назад) в таблице. (Все таблицы данных (положения, скорости, характеристики частиц) также перестраиваются.) Каждое пересечение одна частица испытывает справа, а другая — слева. Таким образом, сумма полного числа пересечений (считая правые положительными, а левые отрицательными) должна равняться нулю; последнее обстоятельство использовалось как проверка кодов. Далее эта процедура приводит к однозначному распределению для частиц, причем одно место в таблице не могут занимать две частицы. Это была вторая проверка кодов.

Граничные условия ставятся следующим образом. На каждом конце помещается набор минимых зарядов. Выбирается достаточное число этих зарядов, с тем чтобы частица изнутри системы не смогла перескочить через последнюю минимую частицу в течение одного временного шага. Если мы хотим иметь условие зеркального отражения на границе, то минимые частицы должны быть зеркально симметричны (т. е. располагаться на равных расстояниях от границы, но иметь отрицательные скорости) частицам, непосредственно примыкающим к границе. Если же мы хотим иметь периодические граничные условия, то минимые заряды должны быть тождественны частицам на другом конце системы, за исключением того, что они должны быть смещены на расстояние  $\pm L$ , где  $L$  — длина системы; знак зависит от того, какой конец системы мы рассматриваем. Движение последних минимых частиц может быть неправильным, но это несущественно, так как они заменяются новыми минимыми частицами в конце каждого временного шага.

Обычно код пробегает в среднем от 1,2 до 1 пересечения на частицу за временной шаг. Энергия сохраняется с точностью до  $10^{-5}$  на протяжении 40 временных шагов, когда на дебаевской длине находится 20 частиц. Код требует примерно  $2 \cdot 10^{-4}$  с на частицу и на один временной шаг на IBM 360/65. Как правило, включаются также диагностики, как вычисление функции распределения по скоростям, фурье-образов электрического поля и траекторий частиц в фазовом пространстве. Они могут потреблять заметное время.

### 3. Численные методы, используемые в двухкомпонентной модели плоских листов

Двухкомпонентная модель плоских листов [4] содержит два типа листов с равными, но противоположными по знаку зарядами и различными массами. Эти листы всегда перпендикулярны какой-либо оси  $x$ , но могут свободно проходить друг через друга. Уравнение движения листа имеет вид

$$\ddot{x}_i = \frac{q_i}{m_i} E_i, \quad (12)$$

где  $E_i$  — среднее электрическое поле у  $i$ -го листа ( $i$  — это порядковый номер на оси  $x$ ). Между пересечениями поле  $E$  постоянно и орбита  $i$ -го листа определяется формулой

$$x_i = x_{i0} + v_{i0}t + \frac{q_i E_i t^2}{2m_i}. \quad (13)$$

Аналогично для орбиты соседней частицы имеем

$$x_j = x_{j0} + v_{j0}t + \frac{q_j E_j t^2}{2m_j}, \quad (14)$$

где  $j = i \pm 1$ . Поскольку заряд на листе равен  $\pm \sigma$ , то по закону Гаусса поле  $E_j$  должно быть равно  $E_i \pm 4\pi\sigma$ , где выбор знака зависит от знака заряда на  $i$ -м листе. Время пересечения листов  $i$  и  $j$  получается в результате приравнивания  $x_i$  и  $x_j$  и определяется уравнением

$$(x_{i0} - x_{j0}) + (v_{i0} - v_{j0})t + \left( \frac{q_i E_i}{2m_i} - \frac{q_j E_j}{2m_j} \right) t^2 = 0. \quad (15)$$

Решая это уравнение относительно  $t$ , получаем

$$t = \frac{\Delta x \pm (\Delta v^2 - 4\Delta a \Delta x)^{1/2}}{2\Delta a}, \quad (16)$$

где

$$\Delta x = x_{i0} - x_{j0}, \quad (17)$$

$$\Delta v = v_{i0} - v_{j0}, \quad (18)$$

$$\Delta a = \frac{q_i E_i}{2m_i} - \frac{q_j E_j}{2m_j}.$$

Возможно, что частицы  $i$  и  $j$  никогда не пересекутся или время пересечения слишком велико, так что они пересекут раньше другие частицы. Однако всегда верно утверждение, что пересечение может иметь место только для соседних в данный момент частиц.

Теперь мы можем двигать вперед систему, пересечение за пересечением, регистрируя положение и скорость частицы в момент ее последнего пересечения. Мы составляем список времен пересечений для частиц, пересекающих своих ближайших соседей. Две

частицы с самыми короткими временами пересечений перескакают. После пересечения этих частиц для них вычисляются новые времена пересечений по отношению к их новым соседям. Старые времена пересечений, соответствующие этим частицам вычеркиваются, а новые времена пересечений вносятся в таблицу пересечений на соответствующие места.

Чтобы избежать вышесказанного метода был эффективным и не требовал очень большого машинного времени, используется ряд приемов. Во-первых, времена пересечения заносится в таблицу пересечений в том порядке, в котором они происходят, так что следующим пересечением является то, которое приходится в начале таблицы. Чтобы упростить ввод времен пересечения в таблицу, первые несколько значащих цифр времени пересечения используются для определения его положения в таблице. Чтобы не возникало необходимости перестраивать всю таблицу пересечений или передвигать большое число времен пересечений в таблице, когда туда вставляется новое, таблица делается гораздо больше (примерно в 10 раз), чем полное число времен пересечения, с тем чтобы она содержала главным образом пустые места. Таким образом, когда вставляется новое время пересечения, оно обычно попадает на свободное место. Если же на этом месте имеется какое-то время пересечения, то последнее сравнивается с тем, которое нужно поместить, и они размещаются в таблице в надлежащем порядке. Если занесенное в список значение нужно подвинуть, то оно обычно помещается только на одно место из-за большого числа пустых мест.

Поскольку мы не можем заполнить бесконечно длинную таблицу пересечений, мы должны определить наиболее вероятное время пересечения для соседя. Если время больше чем это, то другая из этих частиц будет пересечена третьей частицей прежде, чем предсказанное пересечение произойдет. Наиболее вероятное время пересечения определяется из следующих соображений. Скорость пересечений, которые испытывает частица со скоростью  $v$ , приблизительно равна

$$n(v^2 + v_c^2)^{1/2} = \frac{dN_c}{dt} = \dot{N}_c \quad (15)$$

где  $N_c$  — число пересечений, которые испытала частица,  $n$  — плотность,  $v_c^2$  — среднеквадратичная хаотическая скорость (в этом выражении мы использовали среднеквадратичную скорость относительно других частиц, но можно было бы использовать и среднюю относительную скорость). Вероятность того, что частица не испытает пересечения за интервал времени  $t$ , равна

$$P(\text{нет пересечений}) = \exp[-\dot{N}_c t]. \quad (20)$$

Максимальное время пересечения, удерживаемое в таблице, выбирается таким, чтобы величина  $P$  была крайне малой, обычно

порядка  $40^{-8}$ – $40^{-9}$ . (Минимальное значение  $\dot{N}_c$  можно использовать для вычисления  $t$ , причем  $t$  должно быть порядка 20 средних времен пересечения.) Такая малая величина  $P$  действительно грубо, поскольку нужно быть уверенным, что фактическое пересечение не пропущено в системе, состоящей из нескольких тысяч листов, каждый из которых испытывает несколько тысяч пересечений за время счета. Ввиду этого обстоятельства большая часть времен пересечения сконцентрирована вблизи начала таблицы. Это нужно учитывать для того, чтобы в начале таблицы имелось место для размещения новых значений пересечений. Данную ситуацию можно было бы улучшить, оставив блок из небольшого числа мест в конце таблицы, чтобы размещать времена пересечений, в 6–7 раз превосходящие среднее время пересечения, но это могло бы усложнить логическую схему использования и обновления таблицы и потому не было осуществлено нами.

Как уже упоминалось, для ускорения ввода поступлений в таблицу пересечений первые несколько цифр времени пересечения используются в качестве адреса. С течением времени размер времен пересечения становится все больше и больше, и, следовательно, адреса поступлений становятся все длиннее и длиннее. Чтобы таблица пересечений не была слишком большой, мы должны сконцентрировать это. Последние осуществляются путем использования круговой таблицы, причем расстояние по окружности равно максимальному интервалу, на протяжении которого нужно рассматривать пересечение. У последнего рассмотренного времени пересечения помещается флажок. Это время вычитается из новых времен пересечения, и первые несколько значащих цифр тогда определяют их размещение в таблице относительно последнего пересечения.

Граничные условия задаются путем помещения мнимых частиц на концах системы. Для получения граничных условий идеального отражения зеркальные изображения крайних частиц помещаются с обеих концов в зеркальных точках. Для получения периодических граничных условий в соответствующие места помещаются зеркальные отражения противоположных концов.

Вышеописанный метод развития системы — пересечение за пересечением — имеет ту же точность, что и машина, и очень быстр. На использованной машине энергия сохраняется с точностью до десяти значащих цифр в течение длительного времени ( $\omega_p t \approx 100$ ; машина имела 12 значащих цифр). Вычисления заняли около 1 мин на период  $\omega_p^{-1}$  для 1000 электронов и 1000 ионов на машине СДС 1604, которая считает на несколько порядков медленнее, чем современные быстродействующие ЭВМ. Время вычислений пропорционально числу частиц, умноженному на число частиц на дебаевои длине. Единственным недостатком кода является то, что для таблицы пересечений требуется большая



память. В момент разработки кода это не было важно, так как машинное время существенно ограничивало размер системы, которую можно было рассмотреть.

Описанный метод времен пересечений можно использовать и для однокомпонентной задачи. При вычислении времен пересечения для соседних частиц нужно решить трансцендентное уравнение

$$\delta = (x_i - x_{i+1}) \cos \omega_p t_c + \frac{x_i - x_{i+1}}{\omega_p} \sin \omega_p t_c \quad (2k)$$

( $\delta$  — расстояние между частицами). С другой стороны, для двухкомпонентной модели можно использовать приближенный метод разложения времени пересечения, применяемый в однокомпонентной модели. Это было сделано и дало хорошие результаты (по существу метод так же быстр и сохраняет энергию с точностью до четырех значащих цифр в процессе счета при  $\omega_p t \approx 100$ ).

#### 4. Проблема шумов и столкновений в модели плоских листов

Поскольку модель плоских листов состоит из отдельных частиц, то в ней происходят явления типа столкновений. Каждый раз, когда какой-то лист пересекает другой, возникает скачок в силе, которая действует на лист, и его орбита изменяется. Эти скачки приводят к эффектам типа столкновений, которые могут замаскировать эффекты, подлежащие исследованию. Если мы намерены использовать наш код, то важно понять эти эффекты. Впрочем, эти эффекты интересны и сами по себе, поскольку они связаны с кинетической теорией плазмы. Многие положения этой теории могут быть детально проверены на этой модели [2, 4, 5, 10].

Когда стандартная кинетическая теория плазмы, в которой используется только двухчастичная корреляционная функция применяется к однокомпонентной модели плоских листов, то устойчивые функции распределения оказываются не зависящими от времени. Этот результат в общем физически естествен. Рассмотрим две одинаковые частицы в одномерном пространстве, которые вначале имеют скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Включим взаимодействие между ними. После взаимодействия их скорости будут  $\tilde{v}_1$  и  $\tilde{v}_2$ . Благодаря сохранению энергии и импульса имеются две сохраняющиеся величины. Единственно возможными значениями  $\tilde{v}_1$  и  $\tilde{v}_2$ , которые сохраняют энергию и импульс, являются

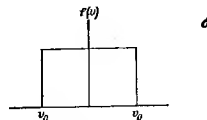
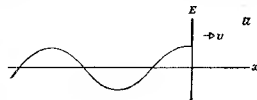
$$v_1 = \tilde{v}_1, \quad v_2 = \tilde{v}_2 \quad (2l)$$

или

$$v_1 = \tilde{v}_2, \quad v_2 = \tilde{v}_1. \quad (2m)$$

В любом из двух случаев функция распределения не изменится.

Можно было бы ожидать, что в плазме, где одновременно взаимодействует много частиц, эти два закона сохранения не дадут полной картины. Однако теория рассматривает все взаимодействия как слабые, и, следовательно, соответствующие эффекты будут аддитивными (предполагаем, что сталкивающиеся частицы некоррелированы, или хаотичны). Влиянием одного столкновения



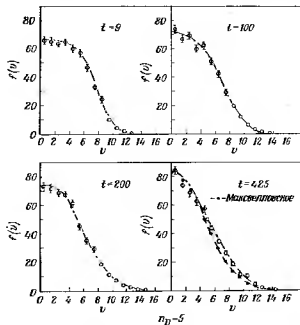
Фиг. 3. Прямоугольная функция  $f(v)$ .

a — след за быстрым листом; б — начальное распределение по скоростям.

на другое пренебрегается, поэтому законы сохранения по-прежнему фиксируют результат. На самом деле при одновременном соударении одно столкновение воздействует на другое, и потому должен быть какой-то столкновительный эффект.

Эти положения были проверены на численном эксперименте в однокомпонентной модели плоских листов. Была определена истинная скорость релаксации к максвелловскому распределению [10]. Исследовалось изменение во времени распределения, которое вначале имело прямоугольный профиль, показанный на фиг. 3. Начальную скорость частицы получали в результате вычисления случайного числа, которое равномерно распределено на интервале от  $-1$  до  $1$ , и умножения его на  $v_0$ . Чтобы определить зависимость эволюции во времени от кинетической энергии или от числа частиц на дебаевской длине  $[\lambda_D = (v^2)^{1/2}/\omega_p; (v^2) = = 1/v_0^2$  — среднеквадратичная скорость], использовались раз-

ные  $v_0$ . Начальные положения частиц выбирались равномерным распределением в пространстве. За время первого колебания плазмы вокруг каждой частицы образовывались экранирующие облака. Образование этих облаков требует некоторой энергии и результатом является существование короткого периода быстрой перестройки, которая скругляет углы распределения. После этой начальной перестройки распределение изменяется очень

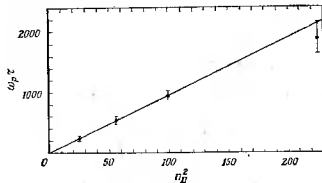


Фиг. 4. Изменение во времени прямоугольной функции распределения

медленно. На фиг. 4 показана эволюция распределения по скоростям при 5 частицах на дебаевской длине. На первом графике показано распределение непосредственно после быстрой перестройки; последующие графики показывают, как распределение релаксирует к максвелловскому. По существу максвелловское распределение достигается при  $\omega_p t = 425$ . Это время гораздо больше того, которое требуется, чтобы группа выбранных частиц достигла основного распределения; последнее составляет только  $10\omega_p^{-1}$ .

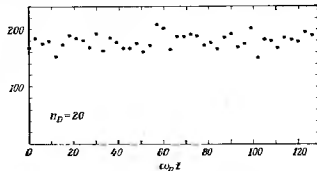
График времени релаксации, полученного из таких вычислений, в зависимости от  $(n_D v_0)^2$  представлен на фиг. 5. Видно, что время релаксации пропорционально  $(n_D v_0)^2$ . Последнее говорит о том, что к релаксации ведет одновременное взаимодей-

трех частиц, поскольку время релаксации, обусловленной двух-частичными взаимодействиями, было бы пропорционально  $n_D^{-2}$ , если бы члены этого порядка не сокращались. В настоящее время



Фиг. 5. Время релаксации как функция  $(n_D v_0)^2$ .

нет теоретических работ, которые предсказывали бы эту релаксацию, хотя время релаксации, во всяком случае его порядок,



Фиг. 6. Флуктуации функции  $f(v)$ . Точка на вертикальной оси есть  $f(0)$ .

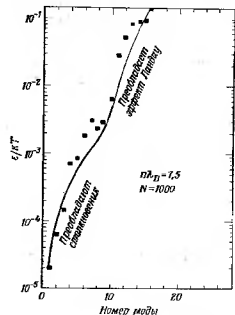
можно оценить, изучая излучение и поглощение волн в результате столкновений частиц.

Интересно, что функция распределения обнаруживает быстрые хаотические флуктуации около некоторого среднего распределения, которое постепенно релаксирует к максвелловскому. На фиг. 6 показаны флуктуации числа частиц, скорости которых заключены в малом интервале vicinity нуля. Ясно видны быстрые флуктуации. Последние обусловлены постоянным обменом между

энергий электрического поля и кинетической энергией частиц. Хотя этот обмен происходит постоянно, его природа такова, что он приводит очень малое систематическое изменение. Это доказывает, что медленная релаксация распределения возникает из очень тонкого баланса, и, следовательно, описываемые вычисления обеспечивают важную проверку кинетической теории плазмы.

### 5. Излучение и поглощение продольных волн из-за столкновений

В предыдущем пункте мы видели, что столкновения двух частиц не изменяют функцию распределения однокомпонентной



Ф и г. 7. Зависимость излучательной способности от номера моды.

волн. Более того, это взаимодействие также ведет к излучению продольных волн. Излучение продольных волн может происходить также и в однокомпонентной одномерной плазме.

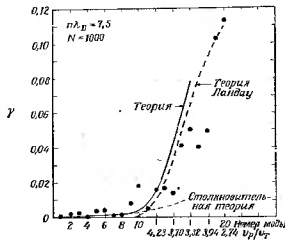
Можно спросить: если столкновения двух частиц в модели плоских листов не приводит к термализации функции распределения, то как они могут привести к излучению и поглощению плазменных волн? Ответ заключается в следующем. Отсутствие релак-

саций при двухчастичных столкновениях является следствием законов сохранения энергии и импульса. В случае излучения и поглощения волны имеется третий партнер — волна, которая также несет энергию и импульс, так что указанные законы сохранения не будут больше полностью определять окончательный результат. Была развита теория излучения продольных волн

одномерной плазмы и что существующая релаксация распределения к максвелловскому на самом деле является очень медленной. Отсюда можно было бы сделать вывод о том, что эффекты столкновений не существенны для расчетов в модели плоских листов. Однако это не так, поскольку столкновения могут влиять на разные величины по-разному. При исследованиях на модели плоских листов такие факты были действительно обнаружены. Одним из важных примеров этого являются излучение и поглощение продольных волн из-за столкновений.

Когда две заряженные частицы сталкиваются друг с другом, их взаимодействие приводит к излучению электромагнитных волн. Если две заряженные частицы сталкиваются друг с другом, их взаимодействие приводит к излучению электромагнитных волн. Если две заряженные частицы сталкиваются друг с другом, их взаимодействие приводит к излучению электромагнитных волн.

саций при двухчастичных столкновениях является следствием законов сохранения энергии и импульса. В случае излучения и поглощения волны имеется третий партнер — волна, которая также несет энергию и импульс, так что указанные законы сохранения не будут больше полностью определять окончательный результат. Была развита теория излучения продольных волн



Ф и г. 8. Затухание как функции номера моды.

[12, 13], которая учитывает ускорение двух частиц и их экранирующих оболочек, когда они сталкиваются друг с другом. По существу эта теория идентична той, которая используется для описания слабой турбулентности в плазме. Таким образом, проверка теории излучения продольных волн одновременно обеспечит и проверку теории слабой турбулентности, по крайней мере для волн малой интенсивности, которые здесь рассматриваются.

Теория излучения продольных волн проверялась на однокомпонентной модели листов [14]. Возникающее здесь излучение аналогично тому, которое появляется от столкновений электронов с электронами (столкновения одинаковых частиц). График зависимости интенсивности излучения от волнового числа (обратно пропорционального длине волны) представлен на фиг. 7. Сплошная кривая дает излучение, предсказываемое теорией. Точки соответствуют результатам численного эксперимента на системе (10M) частиц, когда на дебаевской длине было 7,5 частиц. Согласно очень хорошему, причем интенсивность излучения изменялась на три порядка.

К излучению волн из-за столкновений частиц тесно примыкает поглощение волн по той же причине. Столкновительные процессы волн можно детектировать по излучению благодаря тому, что излучение и поглощение должны приводить к тепловому равновесию, в котором каждая мода колебаний имеет энергию  $kT$ . На фиг. 8 представлен график зависимости декремента затухания для волн от волнового числа (числа длин волн, которые укладываются в системе). Система содержала 1000 листов и имела 7,5 частиц на дебаевской длине. Сильношиная кривая получена из теории и является суммой двух пуктирных кривых, характеризующих «столкновительное затухание» и затухание Ландау. Кривая столкновительного затухания получена на только что обсуждавшейся теории столкновений. Затухание, представленное кривой с отметкой «теория Ландау», не связано со столкновениями, а возникает от поглощения энергии частицами, которые движутся с фазовой скоростью волны.

### § 3. Исследования с частицами конечного размера

Для преодоления столкновительных эффектов, связанных с листами, было бы полезно использовать несколько измененную модель. По существу нас интересуют не детали движения частиц, а скорее коллективное движение в целом, которое содержит много степеней свободы. Нужно иметь возможность моделировать плазму таким образом, чтобы правильно трактовать ее поведение в целом, несмотря на игнорирование деталей, связанных со столкновениями частиц.

Существует несколько подходов к этой проблеме. Первый, который мог бы показаться наиболее прямым, требует решения уравнения Власова численно. Это было выполнено с некоторым успехом [15—18]. Однако здесь имеется принципиальная трудность, благодаря которой такой подход пригоден только для описания движения на ограниченном отрезке времени [16, 18]. Действительно, уравнение Власова описывает систему с бесконечным числом степеней свободы (бесконечное число частиц). До тех пор пока функция распределения имеет относительно простую форму, так что ее можно описать несколькими параметрами, можно сказать за ее эволюцией. Однако если функция распределения приобретает такую сложную структуру, что для ее описания требуется большое число параметров (порядка нескольких тысяч), то из-за конечных размеров ЭВМ мы не можем больше следить за деталями движения. Поскольку функция распределения обычно приобретает такую сложную структуру (вероятно, это так во всех случаях интересных в аспекте численных расчетов), то этой проблемой избежать. Когда возникает такое положение, мы должны отбросить некоторую информацию (т. е. упростить функцию распре-

деления), чтобы продвинуться дальше. При любом математическом методе, используемом для сглаживания функции распределения, нет ясности в его физических последствиях. Такое сглаживание отчасти похоже на влияние столкновений в модели дискретных частиц. Однако оно является полностью численным по своей природе, зависит от процедуры сглаживания и требует анализа его воздействия на результаты (теоретического или экспериментального).

Приближение частиц для моделирования плазмы автоматическим ограничивает информацию, с которой машина должна работать, до того предела, который требуется для описания движения частицы. Если повышенные столкновительные эффекты удасться в достаточной степени уменьшить, то этот метод окажется естественным и физически привлекательным методом такого ограничения информации. Оставшиеся столкновительные эффекты можно будет понять и учесть на основе физических соображений, которые в общем уже ясны.

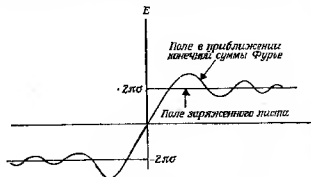
Ряд авторов [19—21] уменьшали столкновительные эффекты, сглаживая поле, обусловленное частицами. Хокли выполнял такое сглаживание, разделяя  $r$ -пространство на ячейки и затем вычислял поля так, как будто все частицы одной ячейки находятся в ее центре. Он пренебрегает взаимодействием частиц внутри каждой ячейки друг с другом, обрезая таким образом взаимодействие на малых расстояниях. Бардсол [20] модифицировал метод Хокли, распределяя заряд ячейки по ее углам. Метод «частиц в ячейке» Морза [21] эквивалентен методу разделения заряда Бардсола.

Все эти методы используют какую-либо математическую процедуру для сглаживания потенциала, а это практически эквивалентно сглаживанию взаимодействия при близких столкновениях. Однако всем этим методам присуща одна и та же трудность — необходимость сглаживания функции распределения при решении уравнения Власова. Процедура же математического сглаживания вводит эффекты, последствия которых понятны не вполне. Сомнения такого рода можно ликвидировать только в результате кропотливого исследования поведения модели (как теоретического, так и экспериментального).

Поведение системы в целом, по-видимому, не зависит критически от детального движения всех частиц. Оно должно определяться рядом макроскопических параметров. Число этих параметров может быть большим, но оно должно быть существенно меньше, чем число частиц. Если это не так, то у нас не остается надежды на описание плазмы. Если это правильно, то должен существовать метод сохранения важной информации и исключения массы деталей, которые неважны. Метод «частиц в ячейке» достигает этой цели путем использования конечного числа частиц и ячеек.

## 1. Модель частиц конечного размера

Мы использовали другой подход к этой проблеме. Поскольку нас в основном интересуют длинноволновые коллективные движения плазмы, то нам нужно удерживать при вычислениях только эти моды, т. е. только фурье-моды с длинами волн, большими некоторой минимальной. Это просто сделать, если опустить электрические поля с длинами волн короче, чем те, которые считают

Фиг. 9. Зависимость поля  $E$  от  $x$ .

важными. Таким образом, мы могли бы принять, что электрическое поле, обусловленное частицей, определяется конечной суммой Фурье:

$$E(r) = 4\pi\sigma \sum_{k_{\text{мин}}}^{k_{\text{макс}}} \frac{ik}{k^2} \exp[ik \cdot (r - r_i)], \quad (2)$$

где  $k_{\text{макс}}$  и  $k_{\text{мин}}$  определяются наименьшей и наибольшей длинами волн, которые нас интересуют,  $r$  — координата частицы и  $\sigma$  — ее заряд. Обычно  $k_{\text{макс}}$  должно быть порядка  $\lambda_D^{-1}$ , где  $\lambda_D$  — дебаевская длина, а  $k_{\text{мин}}$  определяется размером системы;  $k_{\text{мин}}$  — порядка  $R^{-1}$ , где  $R$  — радиус системы.

Если электрическое поле выбрано в виде (24), то оно будет иметь колебания, которые для одномерного случая представлены на фиг. 9. Такие колебания поля нежелательны и могут быть ликвидированы<sup>1)</sup>. Нам не обязательно выбирать поле в виде (24), можно принять и следующее выражение:

$$E(r) = 4\pi\sigma \sum_{k_{\text{мин}}}^{k_{\text{макс}}} \frac{ik}{k^2} f(k) \exp[ik \cdot (r - r_i)], \quad (2')$$

<sup>1)</sup> A. B. Langdon, частное сообщение, 1967.

где  $f(k)$  — формфактор. Подходящим выбором для  $f(k)$  является  $\exp(-k^2 a^2/2)$ . Теперь видно, что если  $k_{\text{макс}}$  было бы бесконечно, то выражение (25) давало бы электрическое поле, соответствующее распределению заряда по закону Гаусса:

$$\rho(r) \sim \sigma \exp\left[-\frac{(r-r_i)^2}{2a^2}\right]. \quad (26)$$

Таким образом, формула (26) будет определять поле, соответствующее частице конечного размера  $a$ . Если  $k_{\text{макс}}^2 a^2 \gg 1$ , то все члены бесконечной суммы  $k$ , большими  $k_{\text{макс}}$ , малы, и конечная сумма дает хорошее приближение для поля такой частицы. Поскольку поле такой частицы гладкое и не осциллирует, то это в основном будет так и для конечной суммы.

Теперь ограничим себя одномерным случаем и рассмотрим взаимодействие между частицами, плотность зарядов которых имеет вид

$$\rho(x) = -\frac{\sigma \exp[-(x-x_i)^2/2a^2]}{\sqrt{2\pi a}}, \quad (27)$$

где  $x_i$  — координата центра облака и  $(-\sigma)$  — его полный заряд. Разлагая плотность заряда в ряд Фурье, получаем

$$\rho(k) = -\frac{\sigma \exp[-(k^2 a^2/2) + ikx_i]}{\sqrt{2\pi}}, \quad (28)$$

в то время как  $E(k)$  определяется выражением

$$ikE(k) = -\frac{4\pi\sigma \exp[-(k^2 a^2/2) + ikx_i]}{\sqrt{2\pi}}. \quad (29)$$

Сила, с которой частица  $f$  действует на частицу  $i$ , записывается в виде

$$F_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} E_j(x) \rho_i(x) dx = \\ = \frac{2\sigma_i^2}{\sqrt{2\pi a}} \int dk d\alpha \frac{\exp[ik(x_j - x) - (k^2 a^2/2) - (x - x_i)^2/2a^2]}{k}, \quad (30)$$

$$F_{ij} = 2\sigma_i^2 \int \frac{\exp[ik(x_i - x_j) - k^2 a^2]}{k} dk. \quad (31)$$

Эта сила имеет ту же функциональную форму, что и поле  $E$  в точке  $x_i$ , создаваемое частицей в точке  $x_j$  с полушириной  $\sqrt{2}a$  и зарядом  $\sigma$ .

Поскольку теперь нам нужно работать с конечным числом членов, мы заменим полученное выражение для силы конечной сум-

мой Фурье

$$F_{ij} = F_0 \sum_{k_{\text{мин}}}^{k_{\text{макс}}} \frac{1}{k} \exp(-k^2 a^2) \sin k(x_j - x_i), \quad (32)$$

где  $k = 2\pi n/L$ ,  $n$  — целое число и  $L$  — длина системы. Эта сила периодична с периодом  $L$  и соответствует рассмотренному бесконечному набору повторяющихся идентичных систем. Система в целом нейтральна, поскольку поле периодично. Последнее эквивалентно наличию неподвижного нейтрализующего фона.

Сила, с которой на частицу  $i$  действуют все другие частицы, определяется выражением

$$F_i = m \ddot{x}_i = \sum_{k_{\text{мин}}}^{k_{\text{макс}}} \frac{A}{k} \exp(-k^2 a^2) \times \\ \times \left[ \sin kx_i \sum_j \cos kx_j - \cos kx_i \sum_j \sin kx_j \right] \quad (33)$$

( $i$ -й член можно вычитать в сумме по  $j$ , поскольку отсутствует воздействие частицы  $i$  самой на себя).

Чтобы рассмотреть движение частицы во времени, предположим, что в течение временного шага силу можно вычислять так, как будто частицы движутся с постоянной скоростью. Далее предположим, что  $k_{\text{макс}} v_i \Delta t$  мало, т. е. что частица проходит за один шаг только малую часть самой короткой не рассматриваемых длин волн. Тогда мы сможем аппроксимировать (33) следующим уравнением:

$$m \ddot{x}_i = \sum_{k_{\text{мин}}}^{k_{\text{макс}}} \frac{A}{k} \exp(-k^2 a^2) \left\{ \left[ \sin kx_i(t) \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 v_i^2(t) \tau^2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + kv_i(t) \tau \cos kx_i(t) \right] \left[ \sum_j \cos kx_j(t) \right] - \left[ k \tau \sin kx_i(t) - k^2 v_i \tau^2 \cos kx_i(t) \right] \right. \\ \left. \times \left[ \sum_j v_j(t) \sin kx_j(t) \right] - \left[ \frac{1}{2} k^2 \tau^2 \sin kx_i(t) \right] \left[ \sum_j v_j^2(t) \cos kx_j(t) \right] - \right. \\ \left. - \left[ \cos kx_i(t) \left( 1 - \frac{1}{2} k^2 v_i^2(t) \tau^2 \right) - kv_i(t) \tau \sin kx_i(t) \right] \left[ \sum_j \sin kx_j(t) \right] - \right. \\ \left. - \left[ k \tau \cos kx_i(t) - k^2 v_i(t) \tau^2 \sin kx_i(t) \right] \left[ \sum_j v_j(t) \cos kx_j(t) \right] + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} k^2 \tau^2 \cos kx_i(t) \sum_j v_j^2(t) \sin kx_j(t) \right\}. \quad (34)$$

Здесь  $t$  — время в начале временного шага;  $\tau$  — время, истекшее от начала временного шага; удержаны члены не выше второго порядка по  $\tau$ . Уравнение (34) можно проинтегрировать, чтобы получить скорости и координаты частиц.

Уравнение (34) выглядит довольно сложным, поэтому возникает вопрос, не четвергали ли мы больше, чем выиграли, используя нашу технику. Здесь необходимо отметить следующее. Во-первых, суммы по  $j$  не зависят от  $i$  и могут быть вычислены для всех частиц раз и навсегда. Каждая сумма по  $j$  должна быть определена для каждого рассматриваемого  $k$ . Таким образом, если имеется  $N$  частиц и  $M$  мод, то нужно вычислить  $\alpha NM$  членов, где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, определяемый числом сумм по  $j$  (в нашем случае их будет шесть). Аналогично, чтобы описать движение частиц, нам нужно вычислить  $\beta M$  членов для каждой частицы, что требует нахождения  $\beta MN$  членов. Следовательно, время полного вычисления будет пропорционально  $MN$ . Если бы мы попытались вычислять взаимодействия частиц непосредственно (последовательно для каждой пары), то время вычислений было бы пропорционально  $N^2/2$ . Таким образом, если  $M$  гораздо меньше числа частиц, то наша техника дает преимущество по сравнению с прямым вычислением взаимодействий. По существу, мы стремимся удерживать только несколько мод — длинноволновые коллективные моды, которые существенны для рассматриваемых проблем. Следовательно,  $M$  должно быть много меньше  $N$ . Кроме того, поскольку частицы должны представлять полную функцию распределения в фазовом пространстве, а моды — только координатную часть возмущения, то необходимо гораздо больше частиц, чем мод.

В результате включения в уравнение (34) зависимости положений частиц от времени мы усложняем вычисления. Однако одновременно мы значительно улучшаем точность метода и получаем возможность выбирать большие временные шаги, что с лихвой компенсирует дополнительные вычисления. Если не делать этого, то закон сохранения энергии для системы будет выполняться очень плохо. С учетом же временной зависимости энергии сохраняется с точностью до  $10^{-6}$  в течение  $\sim 100\omega_p^{-1}$ . Недавно мы обнаружили, что при использовании три определения координат и скоростей схем («перенагивание»<sup>1)</sup> учет указанной временной зависимости дает много преимуществ.

При одинаковом числе частиц и числе мод, таком же, как число точек сетки, используемое в методах Хокки [19], Бардзола [20] и Морса<sup>2)</sup>, вышеуказанный метод является более медленным (их времена счета пропорциональны  $\alpha N + \beta M^2$ , где  $M$  —

<sup>1)</sup> В оригинале: leap frog method. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> R. L. Morse, частное сообщение.

число точек сетки). Однако можно модифицировать эту процедуру, используя комбинацию сеток в  $r$ - и  $k$ -пространствах для того, чтобы сделать число вычислений пропорциональным  $N + \beta M^2$ . Мы сделали некоторые предварительные вычисления этого типа и достигли значительной экономии времени, а точность, по-видимому, сохранилась. Поскольку этот метод прослеживает точную динамику частиц, взаимодействующих через модифицированный кулоновский потенциал, то для проверки вычислений можно использовать многие физические законы сохранения, например можно проверить выполнение сохранения энергии и импульса.

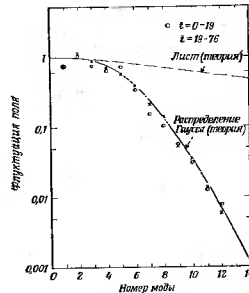
## 2. Исследование флуктуаций вблизи теплового равновесия

Флуктуации около теплового равновесия явились первой проблемой, которую мы исследовали на модели частиц конечного размера. Мы хотели убедиться, что флуктуации ведут себя так, как предсказывает теория. На фиг. 10 представлен график зависимости амплитуды средней квадратичной флуктуации электрического поля от номера моды для заряженных облаков с  $a = 2\lambda_D$  и  $k_{\text{мин}}\lambda_D = 2$ , где  $\lambda_D$  — дебаевская длина. Сплошная кривая получена из теории для облаков, заряд которых распределен по закону Гаусса. Эта кривая получается из формулы

$$P(E_k) dE_k \sim \exp\left[-\frac{\psi_k(E_k)}{KT}\right] dE_k, \quad (35)$$

где  $P(E_k)$  — вероятность нахождения электрического поля в интервале  $dE_k$  около величины  $E_k$ ,  $\psi_k$  — работа, необходимая для создания флуктуаций  $E_k$ ;  $\psi_k$  определяется следующей формулой:

$$\psi_k = \frac{E_k^2 L}{16\pi} (1 + k^2 \lambda_D^2 \exp[k^2 a^2]), \quad (36)$$



Фиг. 10. Среднеквадратичная флуктуация поля  $E$  как функции номера моды.

для создания флуктуаций  $E_k$ ;  $\psi_k$  определяется следующей формулой:

где  $L$  — длина системы. Первый член справа есть энергия, содержащаяся в электрическом поле, а второй — энергия, которая требуется, чтобы изотермически создать в газе из центров облаков требуемую флуктуацию плотности. Из формул (35) и (36) находится среднее значение величины  $E_k^2 L$ ,

$$\langle \frac{E_k^2 L}{2\pi} \rangle = \frac{KT}{2(1 + k^2 \lambda_D^2 \exp[k^2 a^2])}. \quad (37)$$

Видно, что  $\langle E_k^2 \rangle$  сильно уменьшается, когда величина  $k^2 a^2$  больше единицы.

Верхняя пунктирная кривая на фиг. 10 получена из теории для плоских листов, т. е. при  $a$ , равном нулю. Точки — результаты численного эксперимента; они очень хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. Некоторые расхождения имеются при малых номерах мод, но они обусловлены в основном тем обстоятельством, что начальные условия не обеспечивают эти моды в начальный момент энергией  $KT$ , и проходит много времени, прежде чем они релаксируют к своему тепловому значению (здесь используется усреднение по времени). Из фиг. 10 можно заметить, что использование частиц конечного размера почти не влияет на теоретически полученные флуктуации в области длинных волн, но, как и ожидалось, сильно подавляет их в области коротких длин волн. Мы просчитывали другие случаи с различными значениями  $a$  и всегда приходили к тем же результатам.

Другой интересной задачей, которую можно решить, является вывод дисперсионного соотношения в модели частиц конечного размера. Уравнение Больцмана в отсутствие столкновений для этих частиц имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (38)$$

где  $f(x, v)$  — функция распределения центров облаков и их скорости. Действующая на частицы сила получается путем интегрирования выражения  $E(\xi)$  по всем  $\xi$ , где  $x$  — координата центра заряженного облака:

$$F(x) = 4\pi\sigma^2 i \int \frac{dk \exp[-ikx - k^2 a^2]}{\sqrt{2\pi}k} \int f(k, v) dv. \quad (39)$$

Такое же выражение, за исключением множителя  $\exp[-k^2 a^2]$ , получается и для точечных частиц. Линеаризуя уравнение (38) и используя преобразование Фурье по координатам и времени,

получаем

$$f(k, \omega) = \frac{iF(k, \omega) \partial f_0 / \partial v}{m(\omega + kv - i\epsilon)}, \quad (40)$$

$$kF = 4\pi\omega^2 \exp[-k^2 a^2] \int f(k, v) dv. \quad (41)$$

Здесь добавлено малое затухание  $\epsilon$  для определения направления интегрирования вокруг полюсов. Подставляя выражение (40) в (41), получаем дисперсионное соотношение

$$1 = \frac{4\pi\omega^2}{mk} \exp[-k^2 a^2] \int \frac{\partial f_0 / \partial v dv}{\omega + kv - i\epsilon}. \quad (42)$$

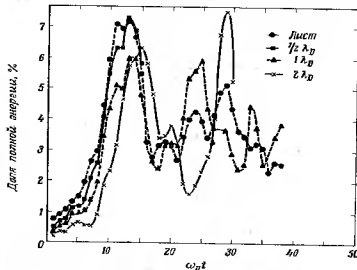
За исключением множителя  $\exp[-k^2 a^2]$ , оно совпадает с обычным дисперсионным соотношением. Таким образом, длинноволновые моды остаются прежними. В то время как коротковолновые моды сильно изменятся.

### 3. Редкий холодный пучок в модели частиц конечного размера

Вторая проблема, которой мы занимались, связана с неустойчивостью, вызываемой редким холодным пучком, проходящим через тесную плазму. В этом эксперименте использовались системы, содержащие 1000 частиц, причем 1/5 их находилась в пучке. На дебаевской длине было 20 частиц, а пучок был холодным и имел скорость, в 4 раза превышающую тепловую скорость (скорости всех частиц сдвинуты так, что полный ток отсутствует). Численный счет был проведен для случаев, когда полупршина частицы  $a$  равнялась половине, одной и двум дебаевским длинам ( $a = \lambda_D/2, \lambda_D, 2\lambda_D$ ). Во всех трех случаях начальные координаты и скорости были одинаковыми. Для сравнения при идентичных начальных условиях был проведен небольшой счет на модели плоских листов.

На фиг. 11 приведены графики полной энергии электрического поля, полученные из этих четырех расчетов. Имеется очень хорошее согласие между случаем плоских листов и частицами с  $a = \lambda_D/2$ . Для частиц с  $a = \lambda_D$  согласие со случаем листов еще достаточно хорошее. Хотя и появляются некоторые расхождения, однако заметная часть этих расхождений может быть связана с энергией электрического поля, находящейся в коротковолновых модах, которые в этом случае подавляются. Можно ввести грубую поправку, добавляя к энергии в случае  $a = \lambda_D$  разность начальных значений энергии электрического поля в случае  $a = \lambda_D$  и в случае листов. Это объясняет примерно половину расхождений в момент первого пика.

Когда мы переходим к случаю частиц с  $a = 2\lambda_D$ , происходит качественное изменение, так как первый пик энергии электрического поля заметно уменьшается и сдвигается на более позднее



Фиг. 11. Энергия электрического поля для двухленточной неустойчивости. Кривые соответствуют разным размерам частиц.

время, а второй пик становится гораздо выше. Такое различие, вероятно, обусловлено тем фактом, что размер частицы влияет на скорость нарастания третьей моды. В табл. 1 приведены скорости нарастания первых четырех мод для всех четырех случаев.

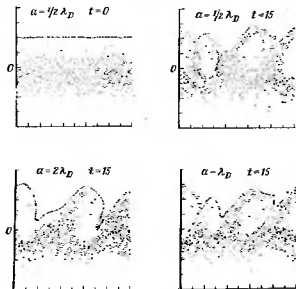
Таблица 1  
Скорости нарастания мод 1—4 для разных размеров частиц

$\omega\lambda_D$	Порядок мод			
	1	2	3	4
0	0,163	0,255	0,250	0,148
0,5	0,163	0,255	0,243	0,125
1,0	0,163	0,250	0,220	0,058
2,0	0,162	0,233	0,114	0,002

На фиг. 12 представлены распределения частиц в фазовом пространстве в моменты  $t = 0$  и  $t = 15$ . Начальные условия одинаковы во всех случаях, так что распределение при  $t = 0$  для



$a = \lambda_D/2$  можно использовать во всех случаях. Графики для  $\lambda_D/2$  и  $1\lambda_D$  удивительно похожи; это касается как числа обратных вихрей, так и их формы при  $\omega_p t = 15$ . В случае же  $a = 2\lambda_D$  образуются только два вихря, так что он качественно отличен от первых двух случаев. По-видимому, третья мода была



Фиг. 12. Вихри в плоскости  $(x, v)$ .

эффективно стабилизирована конечным размером частиц, что привело к качественному различию в энергиях азимитического поля между указанным случаем и остальными. Если бы было больше неустойчивых мод, скажем от 5 до 10, то различие, верооятно, не было бы таким большим.

#### 4. Использование частиц с различными зарядами

Существует еще одна модификация нашей модели, которую мы исследовали. Пусть имеется несколько сортов частиц с зарядами  $-Q_\sigma$  и массами  $M_\sigma$ , где  $\sigma$  указывает сорт частиц. Примем, что отношение  $Q_\sigma/M_\sigma$  одно и то же для всех сортов. Уравнения Власова и Пуассона для этой системы частиц имеют вид

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial \mathbf{v}} - \frac{Q_\sigma}{M_\sigma} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi \left\{ \sum_\sigma Q_\sigma \int f_\sigma d\mathbf{v} - en_0 \right\}, \quad (4)$$

где  $en_0$  — заряд неподвижного нейтрализующего фона (здесь рассматриваются точечные частицы, однако аналогичное рассмотрение не трудно провести и для частиц конечного размера). Введем новую функцию распределения

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_\sigma \frac{Q_\sigma}{e} f_\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (45)$$

где  $e$  — некоторый основной наименьший заряд. Умножая (43) на  $Q_\sigma/e$  и суммируя по все сортам  $\sigma$ , получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (46)$$

тогда как уравнение (44) можно записать в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi \{ e F - en_0 \}. \quad (47)$$

Эти уравнения совпадают с обычными уравнениями Власова и Пуассона для одного сорта частиц. Таким образом, в приближении Власова рассматриваемая система ведет себя как плазма, состоящая из частиц одного сорта.

Преимущество такого метода заключается в следующем. Во многих задачах основной частью частиц образует фон, который осциллирует под действием немногих частиц (например, «горб на хвосте» функции распределения). При использовании обычного метода все машинное время затрачивается на слежение за множеством частиц, с которыми не происходит ничего интересного. Используя же вышесказанную процедуру, мы могли бы заменить основную массу частиц несколькими сотнями частиц с зарядом, скажем, 100  $e$ , а частицы в интересующей нас области фазового пространства представить несколькими тысячами частиц с зарядом  $e$ . Это даст нам эквивалент большого количества частиц. Но прежде чем это сделать, необходимо уменьшить до приемлемой величины эффекты от столкновений массивных частиц. Эффекты столкновений, конечно, не учитываются в уравнении Власова. В этом значительно помогало бы использование частиц конечного размера. Описанная процедура должна быть полезной как в случае одного, так и двух, трех измерений. Мы провели некоторые предварительные исследования в этом методе, и они кажутся перспективными. Однако нужна еще большая работа, чтобы определить его возможности и ограничения.

*Благодарности.* Автор благодарит д-ра К. Смита, который в значительной степени развила двухкомпонентный код, д-ров С. Хси, Р. Шаник и В. Круара, которые разработали метод частиц конечного размера и метод зарядов многих сортов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Buneman O., Phys. Rev., **115**, 503 (1959).
2. Dawson J., Phys. Fluids, **5**, 445 (1962).
3. Dawson J., Nucl. Fusion, Suppl., Pt. 3, 1033 (1962).
4. Smith C., Dawson J., Princeton University Plasma Physics Laboratory, Report Matt-151, 1963.
5. Eldridge O. C., Feiz M., Phys. Fluids, **5**, 1307 (1962).
6. Hasegawa A., Birdsall C. K., Phys. Fluids, **7**, 1590 (1964).
7. Shanny R. A., Dawson J. M., Greene J. M., Phys. Fluids, **10**, 4284 (1962).
8. Longdon B., Dawson J., Symp. Comp. Simulation Plasma and Many-Body Problems, NASA SP-153, Williamsburg, Va., April 19-24, 1967.
9. Egers J., Gravel M., Proc. AFS Topical Conf. Numerical Simulation Plasma, Sept. Paper D3, University of California, Los Alamos, N.M., 1965.
10. Dawson J. M., Phys. Fluids, **7**, 449 (1963).
11. Feiz M. R., Symp. Comp. Simulation Plasma and Many-Body Problems, NASA SP-152, p. 3 Williamsburg, Va., April 19-24, 1967.
12. Birmingham T., Dawson J., Oberman C., Phys. Fluids, **8**, 297, (1965).
13. Birmingham T., Dawson J., Kulstrud R., Phys. Fluids, **9**, 2013 (1966).
14. Dawson J., Shanny R., Birmingham T., Phys. Fluids, **12**, 687 (1969).
15. Kellogg P. J., Phys. Fluids, **8**, 102 (1965).
16. Armstrong T. P., Phys. Fluids, **10**, 1269 (1967).
17. Feiz M. R., Grant F. C., *ibid.*, p. 154.
18. Berk H. L., Roberts K. V., Phys. Fluids, **10**, 4595 (1967).
19. Hockney R. W., Phys. Fluids, **9**, 1826 (1966).
20. Birdsall C. K., Fuss D., Bull. Am. Phys. Soc., **13**, 283 (1968).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ВЛАСОВА МЕТОДАМИ  
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

T. Армстронг\*, P. Хардинг\*\*, Г. Кноэр\*\*\*, Д. Монтегмери\*\*\*

## § 1. Введение.

## 1. Постановка задачи

Вероятно, не существует раздела физики, в котором была бы более очевидна необходимость в численных методах, чем в физике плазмы. Это обусловлено тремя фактами, которые стали общепризнанными.

1) Уравнения динамики физики плазмы просто написать, так как по существу они представляют собой уравнения Максвелла для электромагнитных переменных и классические уравнения движения для механических переменных.

2) Решить же эти уравнения динамики аналитически, несмотря на их простую структуру, невозможно, поскольку они сильно нелинейны и описывают систему с бесконечным числом степеней свободы.

3) Для макроскопического поведения плазмы в целом свойственно многообразие упорядоченных и коллективных движений, которые часто удается выявить из численных данных, в то время как это трудно или невозможно сделать сколько-нибудь удовлетворительным образом аналитически.

В применении численного анализа к физике плазмы с самого начала совершенно естественно наметились два существенно различных подхода, их можно определить как прямое «моделирование» частиц и как метод «уравнений движения континуума».

Первый подход основывается на модели, в которой динамика дискретных заряженных масс (для одного, двух и трех измерений) изучается путем решения уравнений движения для отдельных частиц. Поля постоянно пересчитываются по координатам и скоростям частиц, и система равновесия самосогласованно. Большинство численных расчетов для плазмы представляют собой разновидности этого моделирования. Они широко обсуждаются в данной книге.

Характерный пример метода «уравнений движения» будет рассмотрен в настоящей главе. В этом методе сразу же привлекаются

\* Thomas P. Armstrong, University of Kansas, Lawrence, Kansas.

\*\* Rollin C. Harding, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California.

\*\*\* Georg Knorr, David Montgomery, The University of Iowa, Iowa City, Iowa.

от точной микроскопической динамики частиц, решая взамен набор уравнений непрерывности. Эти уравнения были получены в результате некоторого процесса сглаживания, при котором распределение дискретных частиц, реально образующих плазму, аппроксимировалось некоторой гладкой, непрерывной переменной (гидродинамическая переменная или функция распределения). Таким образом, в то время как в методе уравнения движения проводят сначала усреднение, а затем вычисляют динамическую эволюцию, в методе моделирования эти две операции выполняют в обратном порядке.

Трудно отдать предпочтение одному методу перед другим; каждый дает информацию, которую трудно получить каким-либо другим путем. К достоинствам метода моделирования относится то, что соударения дискретных частиц, которые управляют всеми необратимыми физическими процессами, представлены естественным образом; последнее очень трудно осуществить при непрерывном описании. (Великий, что разбрасывается в физике плазмы, должен только представить себе трудность слежения за развитием, например, парных корреляций во их уравнениях движения, чтобы понять сущность этого явления.) Этому достоинству противостоит тот факт, что заряд в численной модели плазмы иногда не бывает так хорошо распределен, как в реальной плазме. Обычно имеют дело с тысячами частиц, пытаясь моделировать систему, содержащую, скажем,  $10^{12}$ – $10^{14}$  частиц. В результате «шум», или не систематические флуктуации величин полей (которые стремятся к нулю с увеличением числа частиц), часто оказывается гораздо больше таковых в реальной плазме. Если не проявить осторожности, то шум может стать настолько большим, что подавит ожидаемые макроскопические эффекты<sup>1)</sup>.

Главное преимущество метода уравнений движения, по нашему мнению, заключается в том, что гораздо легче провести детальное сравнение с аналитической теорией и тем же результатами, которые можно извлечь из нее. По существу ось аналитическая теория плазмы состоит из приближенных решений уравнений континуума. Метод уравнений движения может быть наиболее полезен для проверки и прогнозирования этих аналитических приближений.

Система уравнений, рассматриваемая в этой главе, состоит из уравнения Власова для функции распределения электронов

<sup>1)</sup> Можно было бы привести пример из теории одномерной плазмы, состоящей из плоских слоев. Статистическая теория равновесной одномерной плазмы показывает, что отношение среднеквадратичной флуктуации электростатического поля плазмы к плотности тепловой энергии порядка так называемого «плазменного параметра». Для лабораторной плазмы этот параметр обычно мал,  $10^{-4}$  или  $10^{-3}$ , в модели плоских слоев он обычно порядка  $1/2\pi$ .

$f(x, v, t)$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - E \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (1)$$

и уравнения Пуассона для электрического поля  $E(x, t)$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} j dv. \quad (2)$$

Эта пара уравнений дает весьма идеализированное описание плазмы при следующих предположениях и приближениях:

- 1) считается, что положительно заряженные ионы (или имеются в любой плазме) неподвижны и распределены однородно;
- 2) предполагается, что отрицательные заряды (электроны) бесконечно тонко раздроблены с постоянным отношением заряда к массе и с постоянным зарядом в единице объема;
- 3) все возмущения пространственно-однородного состояния плазмы однородны;
- 4) учитываются только электростатические силы между зарядами.

Для удобства все величины в этих уравнениях даны в естественных единицах<sup>1)</sup>. Основные единицы времени  $t$  и скорости  $v$  обратно пропорциональны плазменной частоте электронов  $\omega_p$  и тепловой скорости электронов соответственно. Длины  $x$  измеряются в единицах отношения последних, т. е. в дебаевских длинах. Функция распределения электронов  $j = f(x, v, t)$  и электрическое поле  $E = E(x, t)$  также безразмерны. Для дальнейшего ознакомления с физической природой упомянутых величин можно обратиться к любому вузовскому учебнику по физике плазмы (например, Монтгомери и Тидман [1]).

Можно прямо сказать, что полное качественное понимание решений уравнений (1) и (2) при различных начальных и (или) граничных условиях является необходимым, хотя и недостаточным условием для понимания поведения плазмы.

Под задачей с начальными условиями, которой мы здесь в основном будем интересоваться, мы имеем в виду следующее: задается функция  $f(x, v, 0)$  (часто периодическая по  $x$ ) и вычисляются

<sup>1)</sup> До перехода к безразмерным величинам система имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi n_0 \left( 1 - \int dv \right),$$

где  $f$  — функция распределения электронов (вероятность на единицу  $x$ -пространства и на единицу  $v$ -пространства),  $E$  — электрическое поле,  $n_0$  — средняя плотность электронов и ионов в единице  $x$ -пространства,  $-e$  — заряд электрона,  $m$  — масса электрона. Переход к безразмерным величинам приводит к уравнениям (1) и (2).

$f(x, v, t)$  и  $E(x, t)$  для  $t > 0$ . Обычно предполагается, что заряды при  $x = \pm\infty$  отсутствуют, поэтому уравнение (2) однозначно определяет  $E(x, t)$  по функции  $f(x, v, t)$ . Задача с начальными условиями по своему характеру проще, чем *краевая задача* (которую мы получаем в очень упрощенном представлении, поменяв ролими  $x$  и  $t$  в начальных условиях), поэтому в большинстве работ не интересовались краевой задачей. Однако в настоящее время она нуждается в изучении.

Существуют различные начальные состояния, при которых электрическое поле  $E(x, t)$  проявляет тенденцию к осцилляциям с убывающей амплитудой (Ландау [27]). Говорят, что эти состояния затухают из-за *эффекта Ландау* (подробное математическое рассмотрение содержится в работе Сэнза [3]).

В других случаях интеграл  $\int E^2 dx$  проявляет тенденцию к осцилляциям и *нарастанию*. Говорят, что в этих случаях имеет место *неустойчивость*. Нарастание  $\int E^2 dx$  в конце концов должно прекратиться, поскольку полная энергия

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int E^2 dx + \frac{1}{2} \int f v^2 dx dv \quad (3)$$

является интегралом движения для уравнений (1) и (2), причем оба члена в выражении для  $\mathcal{E}$  положительно определенные.

Вероятно, двумя наиболее важными эффектами физического характера, которые можно получить из уравнений (1) и (2), являются нелинейная эволюция затухания Ландау и неустойчивостей. Оба эффекта можно получить из линеаризованной системы Власова — Пуассона, но об этом присудя внутренняя нелинейность.

## 2. Вычислительные трудности

Одной из трудностей, которая больше чем любая другая препятствует применению численного анализа к уравнениям (1) и (2), является тенденция функции  $f(x, v, t)$  создавать *резкие градиенты* в плоскости  $(x, v)$  при возрастании времени  $t$ . Это можно понять из следующего. Уравнение (1) выражает постоянство функции распределения электронов  $f(x, v, t)$  вдоль траектории частицы  $x(\tau), v(\tau)$ , которая определяется уравнениями

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = v(\tau), \quad \frac{dv(\tau)}{d\tau} = -E(x(\tau), \tau). \quad (4)$$

Хорошо известным свойством движения частицы в любом поле (например,  $E$ ) является то, что две точки  $x_1(\tau)$  и  $x_2(\tau)$ , вообще говоря, при больших  $\tau$  расходятся достаточно далеко, даже если вначале  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  находились рядом. Если мы допустим, что начальное распределение  $f(x, v, 0)$  является гладким (в том смысле, что значения  $f(x, v, 0)$  в соседних точках плоскости  $(x, v)$

отличаются очень мало], то эти соседние точки будут расходиться с течением времени, уходя с собой начальные значения  $f$ . Аналогично их новые ближайшие соседи будут в ряде случаев приходить из совершенно других мест и привносить с собой совершенно отличные значения  $f$ . А это значит, что появляются большие и возрастающие значения  $\partial f/\partial v$  и, следовательно, требуется все большая и большая точность при вычислениях  $f$ .

Этот эффект фактически содержится в уравнении для свободно движущихся частиц:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

Видно, что это решение  $f(x, v, t) = f(x - vt, v, 0)$  имеет нарастающие степенным образом производные по  $v$ .

В принципе другие, более тонкие эффекты также могут приводить к этому вопросу, нам нужно рассмотреть электрическое поле  $E(x, t)$  по фурье-компонентам (разложение по плоским волнам); тогда

$$\frac{dv(\tau)}{d\tau} = -E(x(\tau), \tau) = -\sum_{k, \omega} E(k, \omega) e^{i[kx(\tau) - \omega\tau]}. \quad (5)$$

Не останавливаясь на тех условиях, при которых можно произвести такое разложение для  $E(x, t)$ , заметим только, что из детального рассмотрения теории орбит, основанной на уравнениях (4) и (5), следует, что на траектории частиц оказывают сильное влияние только те фурье-компоненты  $E(k, \omega)$ , для которых скорость  $v$  лежит в интервале

$$\Delta v \approx \pm 2 \left[ \frac{E(k, \omega)}{k} \right]^{1/2}$$

вблизи *фазовой скорости*  $\omega/k$ . Этот интервал в пространстве скоростей обычно называют *шириной захвата* волны  $E(k, \omega)$ . Орбиты частиц могут легко пересекать только ту область  $v$ -пространства, которая охватывается перекрывающимися ширинками захвата волн. Если эта область велика, то соседние по скорости точки также могут далеко разойтись, и в конце концов нужно ожидать появления больших  $\partial f/\partial x$ , а также больших  $\partial f/\partial v$ .

В численных расчетах, проведенных с уравнениями (1) и (2) до настоящего момента, эффект больших  $\partial f/\partial v$  оказывался более существенным, чем эффект больших  $\partial f/\partial x$ . Вообще говоря, когда допускаются более сложные спектральные распределения  $E(k, \omega)$ , можно ожидать, что появятся проблемы, связанные с обеими производными. Однако имеются основания в пользу того, что при малых или средних отклонениях от пространственной однородности ограничения из-за  $\partial f/\partial v$  будут всегда более жесткими. Мы убедимся в этом ниже.

### 3. Связь с другими моделями

Мы уже останавливались на связи с подходом дискретного моделирования. Что касается уравнений (1) и (2), то мы знаем три основных подхода к ним. Их можно определить как модель «водяного мешка», прямое решение и метод преобразований. Основной целью этой главы является обсуждение двух модифицированных методов преобразований. Однако вначале немного поговорим о чертах двух подходов.

В модели «водяного мешка» по существу следят за орбитами частиц, (4), используя постоянную функцию  $f$ . Выбираются некоторые особенно удобные начальные условия: предполагается, что функция  $f$  в начальный момент постоянна внутри нескольких простых областей плоскости  $(x, v)$  и равна нулю во всех других местах. Поскольку орбиты (4) никогда не могут пересекаться, то уравнение (1) полностью решается путем слежения за точками границ этих простых областей, так как  $f$  сохраняет свое начальное значение внутри этих областей и остается нулем вне их. (В однородном случае уравнение Пуассона достаточно простое, чтобы пересчитывать  $E$  на каждом шаге.) Этот метод использовали Нильсен и др. [4], Де-Пап [5], а также Бюрк и Робертс (работы [6, 7] и гл. 3 настоящей книги). Его преимуществами являются значительная информация, приходящаяся на каждый истраченный при вычислениях доллар, и простота понимания. Его недостаток связан с тем, что развиваются упомянутые выше слишком большие градиенты в фазовом пространстве и границы областей быстро становятся очень извилистыми. Вряд ли их можно систематически сглаживать без нарушения точности вычислений. Эта модель в основном применяется к явлениям, в которых интересные физические особенности проявляются в течение нескольких первых плазменных периодов.

Единственные прямые решения, которые мы знаем, были получены Кнорром [8] и Келлогом [9]. При вычислениях Келлогм считает ионы подвижными и рассматривает два уравнения Власова (для ионов и для электронов) непосредственно по сетке  $x, v$ . Трудно оценить практическую значимость этого метода, поскольку подобные проблемы не рассматривались с помощью других известных нам методов. Тенденция к слишком большим градиентам  $f$  приводит к численным неустойчивостям, которые нелегко преодолеть. Необходима дальнейшая работа для обоснования этого метода.

Метод преобразований частично порожден стремлением заменить в уравнениях (1) и (2) частное дифференцирование более удобными алгебраическими операциями. Обе производные  $\partial/\partial x$  можно исключить с помощью преобразования Фурье по  $x$ . В пространстве скоростей  $v$  использовались два разных преобразования: преобразование Фурье и преобразование Эрмита (Грама — Чар-

ль). Подробное рассмотрение этих двух подходов и является предметом этой главы.

В § 2 представлена схема двойного преобразования Фурье, предложенная Кнорром [10, 11]. В § 3 обсуждается метод преобразований Фурье и Эрмита, развитый Армстронгом и Монтомгери [12—16]. Параграф 4 посвящен обобщению метода Армстронга, которое было выполнено Хардингом [17, 18] для включения в задачу «мешка» алгебраических полей.

Тот факт, что преобразование Фурье — Эрмита годится для анализа системы уравнений Власова и Пуассона, был независимо открыт и изучен Грантом и Фиском [19, 20] и Садовским [21]. Информацию о последних численных расчетах на основе указанных методов можно найти в литературе, список которой приводится в конце этой главы.

## § 2. Метод двойного разложения Фурье

### 1. Двойное преобразование Фурье как естественный метод решения вычислительных проблем

Как уже отмечалось в § 1, обычные разностные методы, которые непосредственно используются для уравнения Власова, становятся непригодными после нескольких плазменных периодов. Сейчас мы более внимательно разберемся в причинах этой неудачи, поскольку двойное преобразование Фурье позволяет просто и непосредственно избавиться от этого недостатка.

Прежде всего перейдем в уравнении Власова к безразмерным переменным, вводя  $\omega_p^2$  как масштаб времени, где  $\omega_p = (\text{пл}^2 e^2 / m \epsilon_0)^{1/2}$  — плазменная частота. Если допустительно принять какую-то тепловую скорость за единицу, то длины будут измеряться в единицах  $v_{\text{теп}} \omega_p^{-1} = \lambda_{\text{д}}$ , т. е. просто в «дебавесовских длинах». Электрическое поле тогда измеряется в единицах  $\text{пл} e \lambda_{\text{д}}$ .

Можно записать в этих безразмерных переменных наше основное уравнение, описывающее электронную плазму и однопольный ионный фон, как в уравнениях (1) и (2). Функция распределения  $f$  нормируется по единицу:

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx \int_{-\infty}^{+\infty} dv f(x, v, t) = 1, \quad (6)$$

где  $L$  — длина рассматриваемой плазмы.

Чтобы продемонстрировать несовершенство традиционных вычислительных методов, достаточно рассмотреть линеаризованный

вариант уравнений (1) и (2)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - E_1(x, t) \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial E_1(x, t)}{\partial x} = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, v, t) dv. \quad (7)$$

При выводе уравнений (7) предполагалось, что  $f(x, v, t) = f_0(v) + f_1(x, v, t)$ ,  $E = E_1(x, t)$ , и пренебрегалось членами второго порядка по  $f_1$  и  $E_1$ . Поскольку система (7) линейна, то теперь можно ввести явную пространственную зависимость

$$\left\{ \begin{matrix} f_1(x, v, t) \\ E_1(x, t) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} f_h(v, t) \\ E_h(t) \end{matrix} \right\} e^{ihx},$$

в результате наша система принимает вид

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} + ikvf_h - E_h \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} = 0, \quad ikE_h(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_h(v, t) dv. \quad (8)$$

Теперь можно сразу выписать формальное решение для функции распределения  $f_h$ , которое имеет вид

$$f_h(v, t) = \int_0^t e^{-ikv(t-t')} E_h(t') \frac{\partial f_0}{\partial v} dt' + g_h(v) e^{-ihct}. \quad (9)$$

Ясно, что второй член определяется начальными условиями. Величина  $g_h(v)$  должна быть функцией, моменты которой существуют. Когда мы берем какие-либо моменты от  $f_h$ , чтобы получить макроскопические величины, например плотность, импульс и т. п., то лемма Римана — Лебега гарантирует нам, что

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv v^n g_h(v) e^{-ihct} = 0.$$

Если  $g_h(v)$  — голоморфная функция, которая экспоненциально стремится к нулю при больших  $v$ , то интеграл стремится к нулю также экспоненциально (ср. Титчмарш [22]). Если выбрать  $g_h(v)$  целой функцией, которая регулярна во всей комплексной плоскости, то интеграл будет стремиться к нулю при больших  $kt$  быстрее, чем экспонента (например, это осуществляется для максвелловского распределения).

Из-за такого поведения второй член в правой части формулы (9) обычно опускается. Видно, однако, что он не мал по сравнению с первым членом. Это заведомо так для малых времен; для устойчивой плазмы, в которой электрическое поле не растет

экспоненциально, это утверждение остается справедливым при всех временах.

Экспериментальное доказательство того факта, что этот член описывает реальное явление, было получено в результате наблюдения эффектов вхо [23, 24]. Библиографию читатель найдет в статье Бакуса [25].

Напомним, что этот член определяет основные асимптотические свойства решения при больших временах. Только если  $g(v)$  удовлетворяет определенным условиям аналитичности, мы можем ожидать экспоненциального спада или нарастания типа Ландау для электрического поля. Если эти условия гладкости не выполнены, то решение может вести себя почти произвольно [26, 27].

То, что затухание Ландау (или экспоненциальное нарастание в случае неустойчивости) отнюдь не обычное поведение решения, можно понять без всякой математики из следующих рассуждений. Предположим, что мы численно нашли решение уравнений (1) и (2) вплоть до какого-то момента  $T$  и что это решение указывает на экспоненциальный спад электрического поля. Используем теперь это возникшее распределение при  $t = T$ , но с зеркально измененными всеми скоростями, в качестве начального условия для нового счета, эффективно обращаящего время. В результате мы получим экспоненциальное нарастание электрического поля до  $t = T$ . Затем нарастание прекращается и сменяется экспоненциальным спадом. Причина такого поведения, конечно, в том, что уравнение Власова в своем первоначальном виде, так же как и в линеаризованном, инвариантно по отношению к обращению времени и скорости. Таким образом, второй счет — просто обращение первого.

Не только в аналитической теории, но и в численных расчетах второй член в (9), который представляет начальные условия, требует внимания. Уже отмечалось, что по абсолютной величине он сравним с первым членом. Он описывает колебания с частотой  $kt$  в фазовом пространстве. Если попытаться представить функцию распределения ее численными значениями на сетке в пространстве  $x, v$  с размером ячеек  $\Delta x$  и  $\Delta v$ , то эти колебания будут довольно неадекватно описаны, скажем, шестью точками на колебание.

Чтобы описать функцию распределения в пространстве скоростей, нам нужно распространить область по  $v$ , скажем, до четырех тепловых скоростей, так что  $-4 \leq v \leq 4$ . Предположим, также, что имеется  $N = 200$  точек, попадающих в этот интервал, тогда  $\Delta v = 1/N$ .

Отсюда следует, что после момента  $t/2\pi = 1/(6\Delta v k)$  результат вычислений должен ухудшаться, поскольку колебания не могут больше правильно описываться такой сеткой.

В численных расчетах, связанных с затуханием Ландау, существуют очень жесткие требования на допустимые значения волновых чисел. Если выбрать их слишком малыми, то затухание будет незаметным на интервале времени порядка 100 плазменных периодов. Если же выбрать  $k$  большим, то затухание Ландау будет очень большим, а электрическое поле будет спадать слишком быстро. Поэтому в расчетах придерживаются следующего интервала  $1/4 \leq k \leq 1/2$ .

Для  $k = 1/2$  мы получаем  $t/2\pi = 8$ . Это означает, что после восьми периодов плазменных колебаний численное решение не будет больше представлять решение уравнения Власова. Несколько авторов [8, 9] испытали такую неудачу. Если бы в уравнении Власова перейти от координат  $x, y$  к некоторым другим координатам, таким, что в этих новых координатах начальные условия не приводили бы к колебанию с нарастающей во времени частотой, то было бы гораздо легче справиться с численным интегрированием уравнения Власова.

Такое преобразование действительно существует: это преобразование Фурье в пространстве скоростей.

Для простоты предположим, что  $g(v) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-v^2/2)$ . Тогда второй член в формуле (9) преобразуется к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(v) \exp(ikv + iyv) dv = \exp\left[-\frac{1}{2}(kx + y)^2\right]. \quad (10)$$

Видно, что осцилляторное поведение полностью пропало. В результате возникает гладкое распределение Гаусса с центром в точке  $y_0 = -kt$ . Однако если мы захотим представить этот член численно, то сразу столкнемся с другой трудностью. Можно отобразить только конечный по  $y$  интервал, скажем,  $-y_{\max} \leq y \leq y_{\max}$ . Спустя время  $t = y_{\max}/k$  мы потеряем существенную долю информации об этом члене, поскольку он будет вклиняться с нашими вычислительными матриц. Имеется, однако, важное отличие от предыдущего случая: верно, что мы теряем информацию об этом члене спустя некоторое время, но это не нарушает вычисления других членов. Как мы видим, в линейной теории указанный член становится несущественным спустя какое-то время, когда мы вычисляем макроскопические величины. Поэтому можно надеяться, что пренебрежение этим членом при больших временах не будет слишком большим недостатком и в линейной теории. Однако нужно проявлять осторожность: если мы намереваемся рассчитывать эффекты ахо, то должны выбрать  $y_{\max}$  достаточно большим, чтобы указанный член оставался хорошо представленным в течение всего времени развития ахо.

## 2. Представление, граничные и начальные условия

### а. Представление

Чтобы изучить распространение волны в неограниченной или ограниченной плазме, удобно разложить неизвестные функции, входящие в уравнение (1), в ряды Фурье по  $x$ :

$$f(x, v, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n(v, t) \exp(in k_0 x), \quad (11)$$

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E_n(t) \exp(in k_0 x).$$

Величины  $f_n$  и  $E_n$  определяются формулами

$$f_n(v, t) = \frac{1}{L} \int_0^L f(v, x, t) \exp(-i k_0 n x) dx, \quad k_0 = \frac{2\pi}{L},$$

$$E_n(t) = \frac{1}{L} \int_0^L E(x, t) \exp(-i k_0 n x) dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial f_n(v, t)}{\partial t} + i n k_0 v f_n - \sum_{q=-\infty}^{+\infty} E_q \frac{\partial}{\partial v} f_{n-q}(v, t) = 0. \quad (12)$$

Уравнение Пуассона и второе из уравнений Максвелла теперь примут вид

$$-i n k_0 E_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n dv; \quad -\frac{\partial}{\partial t} E_n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f_n dv. \quad (13)$$

Такое представление идеально для ограниченной плазмы; для неограниченной же плазмы оно является приближенным, поскольку мы всегда должны устанавливать некоторое минимальное волновое число  $k_0$ . Однако последнее не накладывает серьезных ограничений. Другой, менее существенный момент заключается в том, что однозначно определяются все  $E_n$  при  $n \neq 0$ , то не  $E_0$ . Последнее есть мгновенное среднее электрическое поле в плазме. В неограниченной плазме оно складывается скоплением зарядов на  $\pm\infty$ ; в ограниченной плазме оно обусловлено внешними граничными условиями. (Пример — плазма в конденсаторе, когда имеется разность потенциалов между пластинами конденсатора.)

Далее мы постоянно полагаем  $E_0 = 0$ . При таком условии наша система полностью эквивалентна уравнениям (1) и (2).

Введем теперь преобразование Фурье по  $v$ , которое определяется формулами

$$F_n(y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(v, t) \exp(iyv) dv,$$

$$f_n(v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(y, t) \exp(-iyv) \frac{dy}{2\pi}.$$

Тогда уравнение Власова записывается в виде

$$\frac{\partial F_n(y, t)}{\partial t} + nk_0 \frac{\partial F_n(y, t)}{\partial y} + iy \sum_{q=-\infty}^{+\infty} E_q(t) F_{n-q}(y, t) = 0. \quad (4)$$

а уравнение Пуассона и второе из уравнений Максвелла в виде

$$-ink_0 E_n(t) = F_n(0, t); \quad \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} = +i \frac{\partial}{\partial y} F_n(0, t). \quad (4)$$

Преимущество двойного преобразования Фурье (и равнозначное Фурье — Эрмита) заключается в том, что в уравнении Пуассона пропадает интеграл с функцией распределения и остается только алгебраическая связь между  $E$  и  $F$ .

Преобразованную функцию распределения  $F_n(y, t)$  можно представить как матрицу; тогда числа  $n$  характеризуют строки а сделанные дискретными  $y$  — столбцы матрицы. Уравнения (4) показывают, что плотность и электрическое поле определяют вектор, который получается из столбца  $y=0$  матрицы  $F$ .

Для численных расчетов удобно ввести  $w = k_0^2 y$  вместо  $y$  и объединить уравнение (4) и уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_n(w, t) + n \frac{\partial}{\partial w} F_n(w, t) = w \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{q} F_q(0, t) F_{n-q}(w, t). \quad (4)$$

Таков окончательный вид системы, которая будет программироваться. Характеристиками уравнений (4б) являются прямая линия с угловым коэффициентом  $1/n$  (ось времени направлена вверх):

$$t - t' = \frac{1}{n} (w - w').$$

Можно проинтегрировать вдоль этих характеристик и получить формальное решение для  $F_n$ :

$$F_n(w, t) = F_n(w - nt, 0) + \int_{q=-\infty}^{+\infty} \int_0^t (w - ns) q^{-1} F_q(0, t-s) F_{n-q}(w - ns, t-s) ds. \quad (4б)$$

Если на минуту забыть о члене с суммой, то видно, что форма  $F_n(w, t)$  такая же, как была в момент  $t=0$ , но смещенная вдоль оси  $w$ . Если в машинной программе выбрать временной шаг  $\Delta t = \Delta w$ , то это смещение можно численно выполнять точно. Другими словами, удается точно проинтегрировать первые два члена уравнения (4б). Остается только найти подходящую программу для вычисления членов суммы в уравнении (4).

Когда характеристики уравнения (4б) выходят из области известных величин, первый набор значений при  $t + \Delta t$  приходится получать путем экстраполяции. При повторном шаге значения несправляются, так что ошибка обрывания становится равной  $O((\Delta t)^2)$ .

Заметим, что эти вычисления были проведены на ЭВМ с полной памятью всего в 4 000 слов, включая как программу, так и числовые массивы. Была необходима предельная экономия, так что рассматривались только программы с одной матрицей  $F_n(w, t_0)$  в оперативной памяти.

Функция  $F_n(w, t)$  — обычно комплексная, так что при программировании уравнение (4б) приходится разделять на действительную и мнимую части. Поскольку функция  $f(x, v, t)$  действительная, то  $F_n$  должна удовлетворять условию

$$F_n(w, t) = F_n^*(w, t). \quad (4б)$$

Следовательно, можно исключить мнимую часть  $F_n$ , если вычислить действительную часть  $F_n$  при положительных и отрицательных значениях  $n$  и  $w$ .

Тот факт, что функция  $f(x, v, t)$  является положительно определенной, можно представить только как очень сложное условие на характеристическую функцию [25]. По-видимому, это условие пока не использовалось в численных расчетах.

Заметим, что преобразование Фурье по всем переменным от распределения вероятности хорошо известно в математической статистике. Там его называют «характеристической функцией». Важная роль последней проистекает из того факта, что характеристическая функция от суммы независимых случайных переменных равна произведению их характеристических функций.

Однако применение преобразования Фурье к вычислению функций распределения, кажется, было новшеством, когда оно впервые было сделано в 1963 г.

#### б. Законы сохранения

Система уравнений (1) и (2) является консервативной системой, для которой выполняются определенные законы сохранения. Наиболее важными являются законы сохранения числа частиц, импульса и энергии.



Постоянство числа частиц выражается следующим равенством:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_0(0, t) = 0, \quad \text{или} \quad F_0(0, t) = 1, \quad (19)$$

которое следует из (16) при  $w = 0$  и  $n = 0$ .

Дифференцируя (16) по  $w$  и считая  $w = 0$  и  $n = 0$ , получаем ввиду симметрии суммы следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left. \frac{\partial}{\partial w} F_0(w, t) \right|_{w=0} = 0, \quad (20)$$

которое выражает сохранение импульса.

Наконец, дважды дифференцируя (16) по  $w$  и используя формулу (13), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{2} F_0 \frac{\partial^2 F_0(w, t)}{\partial w^2} \right]_{w=0} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n(t)^2 = 0. \quad (21)$$

Первый член представляет кинетическую энергию частиц, а второй — энергию электрического поля.

#### в. Обрывание

Суммирование в уравнениях (16) и (17) проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$ , и возникает вопрос, какова будет ошибка, если сумму обрывать. Предположим, что мы пренебрегли всеми членами с  $n \geq N+1$  и что выполняется соотношение  $F_n = O(\epsilon^n)$  или как начальное условие, или для какого-то более позднего момента.

Тогда член взаимодействия

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{w}{q} F_q(0, t) F_{n-q}(w, t),$$

который связывает различные моды, будет содержать слагаемые порядка  $\epsilon^{N+1+|M|}$ , т. е. порядка  $\epsilon^{2N-n}$  при  $\nu > n$ . Наибольшая ошибка, которая будет получаться, возникает от первого отброшенного члена с  $\nu = N+1$ ; он порядка  $\epsilon^{2N+2-n}$ . Поскольку  $F_n = O(\epsilon^n)$ , то относительная ошибка по отношению к  $F_n$  будет порядка  $\epsilon^{2(N+1-n)}$ . Видно, что эта ошибка растет при увеличении порядка  $n$  гармоники и становится  $O(\epsilon^2)$  для  $n \rightarrow N$ . Молчаливо предполагалось, что эти ошибки не накапливаются со временем и потому не портят оценку. Можно, однако, прямо из численных результатов увидеть, насколько все же хорошо выполняются наши предположения. Оказывается, что в большинстве случаев достаточно рассмотреть всего несколько гармоник. Например, для устойчивых колебаний всегда легко удержать вторую гармонику ниже уровня первой гармоники на два или даже более порядка

В случаях неустойчивости вторая гармоника была связана с первой гармоникой и имела скорость нарастания, в 2 раза большую, чем у первой гармоники. В результате ко времени, когда неустойчивость выравнивалась, амплитуда второй гармоники нарастала до  $\frac{1}{10} - \frac{1}{3}$  от амплитуды первой гармоники. Это указывает на то, что обрывание приводит к некоторой неточности.

Нам нужно ввести и другое обрывание из-за конечности интервала по  $w$ . Как было показано выше, всегда будут члены, которые вытекают к границе матрицы и затем просто терпят. Одни из примеров представлено на фиг. 3. Кажется, что такая потеря информации является неизбежным свойством интегрирования уравнения Власова. К счастью, обрывание ее создает каких-либо численных неустойчивостей. С другой стороны, обрывание матрицы в разложениях Фурье — Зринца приводит к численным трудностям (ср. § 3). Ошибка, которая возникает от такого обрывания, можно определить экспериментально, и мы остановимся на этом в § 2, п. 4.

#### г. Граничные условия

При моделировании неограниченной плазмы разложение функции  $f(x, v, t)$  в ряды Фурье уже обеспечивает периодические граничные условия. Однако решение  $F_n(w, t)$  будет комплексным. Поскольку  $F_n(-w, t) = F_n^*(w, t)$ , то при вычислениях можно ограничиться положительными  $n$ . Такая схема применялась для изучения нелинейного поведения уединенных бегущих волн.

Если мы заинтересованы в снижении стоимости расчетов, то можно исходить из симметричных начальных условий:

$$f(x, v, 0) = f(-x, -v, 0). \quad (22)$$

Легко показать, что для всех более поздних времен функция распределения будет сохранять эту симметрию. В  $F$ -пространстве условие (22) записывается в виде

$$F_n^*(w, t) = F_{-n}(-w, t).$$

Отсюда, используя условие действительности (18), получаем

$$F_n(w, t) = F_n^*(w, t), \quad \text{или} \quad \text{Im } F_n(w, t) = 0.$$

Мнимая часть  $F$  тождественно равна нулю, и мы сокращаем вдвое время на вычисления, не говоря уже об упрощении программирования.

Однако за это приходится расплачиваться. В силу симметрии для любой волны, которая распространяется, допустим, вправо, имеется также еще одна, которая распространяется влево. Если мы изучаем неустойчивость типа взорв на хвосте, то всегда должно быть по горбу на каждом из двух хвостов и т. п. Электрическое

поле будет полем стоячей волны, которая будет периодически почти пропадать. Чтобы сопоставить результаты такого расчета с простыми понятиями типа захваченных частиц и т. п., необходимо привлечь дополнительные аргументы (например, считать, что две волны слабо связаны), которые не вполне очевидны при сильной нелинейности, когда модуляция плотности велика.

В качестве граничного условия при  $w = +w_{\text{макс}}$  выберем  $F_n(\pm w_{\text{макс}}) = 0$ . Это, кажется, простейший и наилучший путь решения данной задачи. Все другие граничные условия, вероятно, будут порождать численные неустойчивости.

#### д. Начальные условия

В принципе можно использовать любое начальное условие, которое представимо с достаточной точностью в  $F$ -пространстве. Здесь мы перелистали конкретные начальные условия, которые успешно использовались.

Для устойчивых волн симметричное условие

$$f(x, v, 0) = (2\pi)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}v^2\right) (1 + A \cos k_0 x) \quad (2)$$

описывает затухающую стоячую волну. Ее типичное поведение иллюстрируется фиг. 1, а-з. Используя различные значения амплитуд  $A$  и волновых чисел  $k_0$ , можно изучать изменение затухания Ландау и его величину как функцию амплитуды и длины волны.

Чтобы изучить двухпотоковые неустойчивости, можно взять два максвелловских распределения, сдвинутых относительно друг друга:

$$f(x, v, 0) = (2\pi)^{-1/2} (1 - A) \exp\left[-\frac{1}{2}(v + v_0)^2\right] + (2\pi)^{-1/2} \frac{A}{\sqrt{\sigma}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma}(v + v_0 - v_p)^2\right] (1 + \epsilon \cos k_0 x); \quad (3)$$

функция  $f$  всегда нормирована.

В этой формуле можно изменять отношение чисел частиц в двух потоках, которое равно  $(1 - A)/A$ , отношение соответствующих температур  $1/\sigma$  и сдвиг  $v_0$  между двумя потоками в пространстве скоростей. Скорость  $v_p$  — фиктивная переменная, определяющая только координатную систему Галилея, в которой мы наблюдаем эту неустойчивость. Ее можно выбрать такой, чтобы электронная плазма в целом находилась в покое или чтобы электронная плазма в целом соответствовала стоячей волне. Отметим, что электрическое поле соответствовало стоячей волне, он автоматически компенсируется равным и противоположным током в плазме, если для условия  $E_0 = 0$ . Кроме того, использовались различные

значения  $v_0$  для того, чтобы проверить инвариантность программы относительно преобразований Галилея (ср. п. 4).

На фиг. 4, а и б представлены типичные результаты. Проходит сравнительно много времени, прежде чем решение начинает нарастать точно по экспоненте. К тому же экспоненциальное нарастание не представляет подлинного интереса, поскольку оно хорошо описывается линейной теорией. Можно сэкономить время вычислений, если выбрать в качестве начального условия функцию распределения, которая соответствует линейному решению задачи. В этом случае можно избежать от существенной части счета, отвечающего фиг. 4, и сконцентрировать свое внимание на области, где электрическое поле достигает своего максимума.

### 3. Сводка результатов

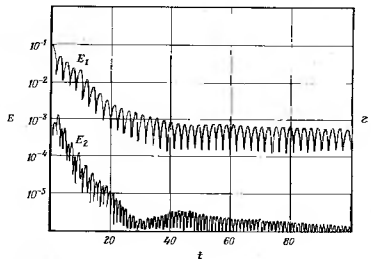
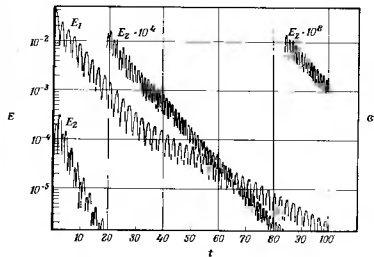
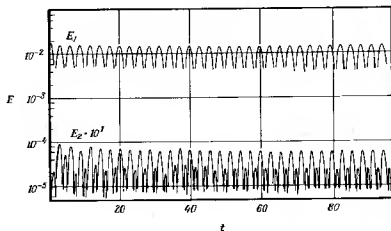
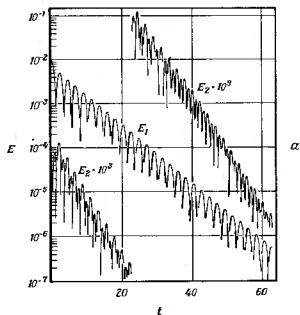
Обсудим вначале результаты, связанные с нелинейными затуханием устойчивых распределений. Начальное условие (23) использовалось всюду. Типичные результаты представлены на фиг. 1, а-з. Графики расположены в соответствии с начальной амплитудой электрического поля, которая задана в виде  $E(t=0) = A/k_0$ . На фиг. 1, а мы наблюдаем затухание Ландау первой гармоники, которое не меняется за время вычислений. Это полностью соответствует линейной теории. Увеличение начального поля в результате уменьшения  $k_0$  приводит нас к фиг. 1, б. Видно, что в данном случае затухание Ландау становится очень малым; это иллюстрирует то, что в численных расчетах ограничен интервал изменения  $k$ . Тщательный анализ фиг. 1, б показывает, однако, что декремент затухания, по-видимому, уменьшается. Это лучше видно на фиг. 1, в, где снова увеличено  $E(t=0)$  и явно видно уменьшение декремента затухания вблизи  $t=30$ .

На фиг. 1, з показано развитие плато у электрического поля. Последнее напоминает нам о квазилинейной теории [29—31], в которой также получается плато электрического поля. Квазилинейная теория в своих предположениях сильно отличается от рассмотренных здесь численных расчетов. Вот наиболее важные ее предположения: 1) непрерывный спектр волн, 2)  $\gamma/\omega_p \ll 1$  и 3)  $\gamma > 0$ , т. е. неустойчивость считается слабой.

Отметим, что предположенное обобщение квазилинейной теории для устойчивого случая [31].

В численных расчетах все три указанные условия не выполняются, поэтому подробное сравнение невозможно.

Квазилинейная теория приходит к уравнению диффузии в пространстве скоростей для однопородной функции распределения  $f_0$ , которое обладает тем свойством, что функция  $f_0$  уплощается в окрестности фазовой скорости волны  $v_0$ . Для этой области фазового пространства предсказано появление при  $t \rightarrow \infty$  горизонтального

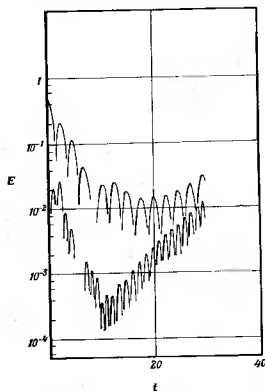


Ф и г. 1. Зависимость электрического поля (в логарифмическом масштабе) от времени для стержней устойчивой волны.

Вспомогательное число  $\lambda$  и амплитуда  $A$  определяются начальными условиями в виде (23),  $E(t=0) = A\lambda$  с той же шкалой полей.

	$\alpha$	$\zeta$	$\epsilon$	$\nu$
$E(t=0)$	0,02	0,04	0,1	0,2
$\lambda$	0,01	0,01	0,05	0,1
$k$	$1/2$	$1/4$	$1/2$	$3/2$

плато у функции  $f_0$ . Сравнивая численные результаты с результатами квазилинейной теории (см. § 3), мы также наблюдаем уплотнение функции распределения, но оно располагается не точно



Фиг. 2. Сильно нелинейная стохастическая волна. Начальное условие такое же, как для фиг. 1, но  $c k = 1/2$  и  $A = 1/2$ .

они вновь начинают расти. В этом случае, вероятно, важную роль играют захваченные частицы.

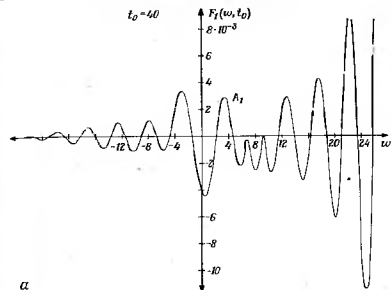
На фиг. 3 приведен типичный график характеристической функции, соответствующей случаю фиг. 1, г. На фиг. 3, а показана характеристическая функция первой гармоники в момент  $t = 40$ . Видно, что в окрестности точки  $w_{макс}$  функция достигает значений, гораздо больших, чем в остальной части интервала. При  $t = 70$  линия функции находится в области малых  $w$ .

Амплитуда второй гармоники всегда по крайней мере на два порядка меньше, чем амплитуда первой. Это говорит о том, что у

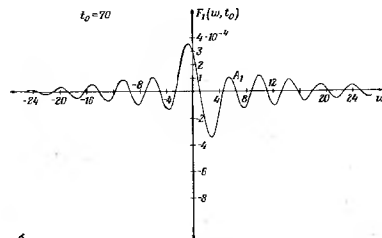
у фазовой скорости и может перемещаться подобно волне. В среднем, однако, можно видеть, что частицы, скорости которых близки к  $v_0$ , в устойчивом случае ускоряются и, следовательно, отбирают от волны энергию.

Эти замечания применимы и к слабо неустойчивой плазме, в которой модуляция плотности мала ( $\Delta n/n \ll 1$ ) и захват частиц все еще несуществен.

При сильной нелинейности ( $\Delta n/n \sim 1$ ) мы ожидаем поведения, которое не имеет большого сходства с предсказаниями квазилинейной теории. На фиг. 2 представлен такой случай с  $k = 1/2$  и  $A = 1/2$ . Диффузия настолько сильна, что плазма порождает так сказать, собственную неустойчивость. На начальном этапе колебания сильно затухают, но затем, после  $t = 16$

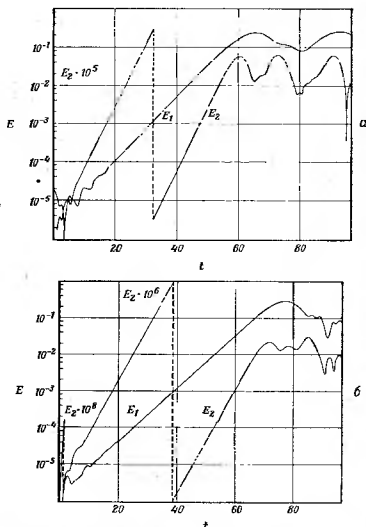


а



б

Фиг. 3. Характеристическая функция  $F_1(w, t_0)$  для  $t_0 = 40$  (а) и  $t_0 = 70$  (б). Отметим, что  $F_1(0, t_0)$  пропорциональна эмпирическому значению электрического поля. Всего двух гармоник дает здесь превосходную аппроксимацию решения уравнения Власова. Затухание второй гармоники почти вдвое больше, чем затухание первой гармоники. Это говорит о том, что вторая гармоника связана с первой: последнее ясно также



Фиг. 4. Зависимость электрического поля от времени в случае неустойчивого начального условия (24).

	$a$	$b$
$k$	$1/4$	$1/4$
$A$	$1/5$	$1/5$
$\nu_1$	$4,2$	$5$
$\sigma$	$1$	$1$

из некоторых аналитических соображений [10, 11]. Такое поведение противоречит, однако, предположениям квазилинейной теории, согласно которой все гармоники связаны только с функцией  $f_0$ , но не друг с другом.

На фиг. 4 представлено характерное развитие двухпотоковой неустойчивости, которая порождается начальными условиями [24]. Можно различить очень четко три совершенно различные стадии. На первой не видно никакой неустойчивости. Электрическое поле колеблется более или менее случайно. В этой области многие решения линейного дисперсионного уравнения дают вклад в электрическое поле. Из фиг. 4, а видно, что поле  $E_1$  сходится к моменту  $t = 3$  до величин на порядок ниже исходного значения.

Спустя некоторое время устанавливается явно экспоненциальное нарастание. Теперь самое неустойчивое решение дисперсионного уравнения доминирует над всеми другими. В конце концов нарастание должно прекратиться. Видно, что электрическое поле колеблется около очень высокого уровня. Это можно назвать первым приближением к турбулентному состоянию плазмы. При  $t = 60$  и позднее  $E_2$  близко к точности до множителя порядка 3 к уровню  $E_1$ . Использование большего числа гармоник позволило бы быть уверенным, что найденные решения точно соответствуют уравнению Власова. Полученный уровень возбуждения опять по порядку величины совпадает с результатом квазилинейной теории, как это подтверждается и более тщательным рассмотрением [10].

Из графиков характеристических функций видно, что они стремятся к нулю при движении к границам  $\omega$  гораздо быстрее, чем в устойчивом случае (фиг. 5). Этого можно было ожидать, поскольку теперь первый член в правой части (9) подавляет второй. На фиг. 6 приведены фазы первой и второй гармоник электрического поля. Ввиду условия (18) можно написать:

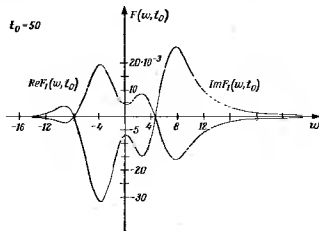
$$F_{2n}(0, t) = |F_n(0, t)| \exp(\pm i\varphi_n(t)).$$

Учитывая это в уравнениях (12), (15), можно представить электрическое поле в виде

$$E(x, t) = \frac{2}{k_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{F_n(0, t)}{n} \right| \sin[nk_0 x + \varphi_n(t)].$$

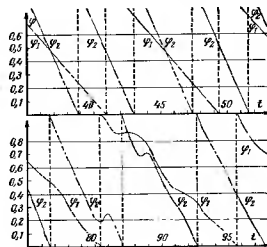
Таким образом,  $\varphi_n(t)$  является фазой электрического поля. Фазовая скорость определяется формулой  $V = -i\varphi_n(t)/nk_0$ . Во время экспоненциального роста  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются линейными функциями  $t$ , как и следует из линейной теории. Для более поздних времен ( $80 < t < 100$ ) это уже не так. После периодов, во время которых

$\psi_1$  и  $\psi_2$  нарастают приблизительно линейно во времени, появляются внезапные резкие изменения. Фазовая скорость изменяет свои



Фиг. 5. Характеристическая функция  $F_1(w, t_0)$  в момент  $t_0 = 50$  для случая фиг. 4, а.

В отличие от случая фиг. 3, а функция на границах в любой момент равна нулю.



Фиг. 6. Графики фазов  $\varphi_n$  поля  $E_n(x, t) = E_n^0(t) \sin[n\pi x + \varphi_n(t)]$  для  $n = 1, 2$  для неустановившегося начального условия, соответствующего фиг. 4, а.

знак и спустя примерно один плазменный период возвращается к своей первоначальной величине. Вопросы о том, как такое по-

веде можно рассматривать в качестве случайного процесса, как оно зависит от числа гармоник, существующих в плазме, и вызваны ли эти эффекты захваченными частицами, пока не исследованы.

#### 4. Вопросы точности

При рассмотрении вопросов точности нужно помнить, что машинная программа имеет дело не с полным нелинейным уравнением Власова, а с системой, отличающейся от последнего, поскольку было обрезано бесконечное число гармоник. Степень, в которой обрезанная система представляет уравнение Власова, обсуждалась ранее (см. п. 2).

Для остающейся части вопроса, насколько точно программа решает обрезанную систему, существует несколько тестов:

- 1) выбор шагов равной длины по времени и по  $w$ ;
- 2) обращение времени;
- 3) использование законов сохранения;
- 4) инвариантность по отношению к преобразованию Галилея.

1) Когда мы уменьшаем конечные разности по времени и по  $w$ , численное решение должно приближаться к действительному решению системы (16). Соответственно закон сохранения энергии должен выполняться все лучше и лучше. На фиг. 7 представлены три расчета для  $\Delta t$ , равного 0,1, 0,2 и 0,4. Соответствующие начальные условия в точности одни и те же. Видно, что полная энергия электрического поля с очень большой точностью ведет себя одинаково, за исключением запаздывания фазы при больших временных шагах, за исключением запаздывания фазы при больших временных шагах. Изменение полной энергии уменьшается примерно в 10 раз, когда временной шаг уменьшается вдвое.

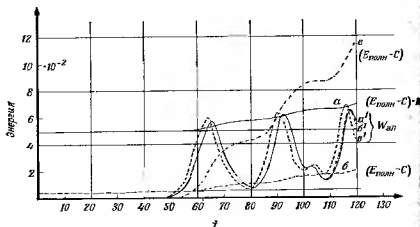
2) Система (16) инвариантна относительно обращения времени. Если мы изменим знак  $w$ , то система должна вернуться точно в исходное состояние. Однако из-за численных неточностей этого не происходит. В результате по величине отклонения можно контролировать допущенные численные ошибки.

Ранее было показано, что численное интегрирование уравнения Власова неизбежно связано с потерей информации, поэтому нельзя ожидать, что система вернется точно в свое исходное состояние после обращения времени. Тем не менее для не очень больших времен можно использовать этот метод как весьма полезную проверку.

3) Наиболее часто для контроля используются постоянство энергии. Закон сохранения числа частиц выполняется уже автоматически, поскольку в программу заложено условие  $F_0(0, t) = 1$ . Полная энергия, однако, является суммой кинетической энергии и энергии электрического поля и изменяется во времени. Из фиг. 7

видно, что в неустойчивом случае приращение полной энергии гораздо меньше, чем прирост энергии электрического поля, который в свою очередь составляет только малую долю от полной энергии. Из фиг. 7 следует, что  $\Delta E/W_{\text{эл}} = 3,3 \cdot 10^{-2}$  и  $W_{\text{эл}}/\mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-2}$ . Здесь  $\mathcal{E}$  — полная энергия системы, а  $W_{\text{эл}}$  — максимальная энергия электрического поля.

4) Использование преобразования Галилея для контроля точности основывается на следующем: если мы в момент  $t = 0$  смотрим на плазму, которая характеризуется функциями  $F_n(u, 0)$ ,



Фиг. 7. Полная энергия электрического поля и полная энергия как функции времени для трех различных временных шагов.

Поступая энергия довольно медленно постоянная. Видно, что максимальная полная энергия увеличивается примерно в 10 раз, если временной шаг  $\Delta t$  уменьшится вдвое. Чтобы построить график полной энергии, на нее были возведены  $C = 2,70$ .

$$\frac{a}{M} \begin{matrix} a & b & c \\ \{ & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{matrix}$$

из другой галилеевской системы координат, которая движется со скоростью  $v_0$  относительно лабораторной системы, то начальные условия переходят в  $F_n(u_0, 0) \exp(i v_0 k_0 t)$ . То есть ЭВМ видит совершенно другое начальное условие. Амплитуды электрического поля инвариантны относительно такого преобразования и должны быть теми же самыми при обоих начальных условиях. Расчет с физически одинаковыми начальными условиями, наблюдаемый только из разных галилеевских координатных систем, не выявил для расхождения вплоть до времени  $t = 30$ . При  $t > 30$  появилась небольшая фазовый сдвиг электрических волн, тогда как амплитуды оставались удивительно постоянными.

### § 3. Метод разложения Фурье — Эрмита

#### 1. Представление и начальные условия

Если функция распределения разлагается в ряды Фурье по координатам и в ряды Грама — Чарля (Эрмита) по скоростям, то нелинейное уравнение Власова сводится к бесконечному набору обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов разложения (Восстияс [32], Янгельман и др. [33], Армстронг [12, 13], Градц и Фиска [19], Садковский [21], Хардинг [17, 18], Кроуфорд и Бродас [34]). Хотя некоторые результаты можно получить аналитически путем линеаризации по малым пространственным возмущениям и введения условия замыкания для исключения высших коэффициентов Эрмита (см. [19, 32, 33]), мы использовали разложение Грама — Чарля для представления нелинейного уравнения Власова в форме, удобной для численного интегрирования. Соответственно в нашем рассмотрении будет сделан упор на применение и опыты расчетов, в которых использовалась техника разложения Фурье — Эрмита; необсуждаемые здесь математические тонкости читатель может найти в работах Грамита и Фиска [19, 20].

Рассмотрим конкретно случай одномерной электростатической плазмы с однородным нейтрализующим ионным фоном, которая описывается уравнениями Власова и Пуассона (1) и (2). Функция распределения разлагается в ряд

$$f(x, v, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(ink_0 x) \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) h_m(v) Z_m(t), \quad (25)$$

где  $x, v, t$  — определенные ранее безразмерные переменные,  $k_0 = 2\pi/L$  есть основное (дисперсное) волновое число и

$$h_m(v) = \frac{(-1)^m \exp(v^2/2)}{[(2\pi)^{1/2} m!]^{1/2}} \frac{d^m}{dv^m} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

— ортогональные полиномы Эрмита степени  $m$ . Приведем некоторые рекуррентные формулы для  $h_m(v)$ :

$$i v h_m(v) = (m+1)^{1/2} h_{m+1}(v) + m^{1/2} h_{m-1}(v), \quad (26)$$

$$\frac{d}{dv} h_m(v) = v h_m(v) - (m+1)^{1/2} h_{m+1}(v) = -m^{1/2} h_{m-1}(v), \quad (27)$$

которые используются для преобразования уравнения Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} Z_{mn}^{(n)}(t) + i n k_0 (m^{1/2} Z_{m-1, n}^{(n)} + (m+1)^{1/2} Z_{m+1, n}^{(n)}) +$$

$$+ m^2 \nu + \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_{n-q} Z_{m-1, q} = 0,$$

$$m = -1, 2, 3, \dots, n-1, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} Z_{0n}^{(n)}(t) + i n k_0 Z_{0, n} = 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Компонента Фурье эллиптического поля  $E_n(t)$ , которые входят в разложение

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(i n k_0 x) E_n(t),$$

находятся из уравнения Пуассона

$$E_n(t) = -\frac{\Delta Z_{0n}^{(n)}(t)}{i(2\pi)^{1/2}}, \quad n \neq 0,$$

и

$$E_0(t) = 0.$$

Усложне нестационарности функции  $f(x, v, t)$  предугадать, чтобы

$$Z_{mn}^{(n)}(t) = 0.$$

Использование замеченно отрывчатых границ приводит к следующим соотношениям [35, 36]:

$$f(x, v, t) = f(-x, -v, t)$$

$$E(x, t) = -E(-x, t),$$

если они вводятся в момент  $t = 0$ . Из формулы (34) следует,

$$Z_{mn}^{(n)}(t) = (-1)^m Z_{m-n, -n}^{(n)}(t),$$

а из формулы (35), что

$$E_n(t) = -E_{-n}^{(n)}(t).$$

Формулы (33) и (36) приводят к равенству

$$Z_{mn}^{(n)}(t) = (-1)^m Z_{m-n, n}^{(n)}(t)$$

или

$$\text{Re } Z_{mn}^{(n)}(t) = 0, \quad m = -1, 3, 5, 7, \dots \\ \text{Im } Z_{mn}^{(n)}(t) = 0, \quad m = 0, 2, 4, \dots$$

Используя соотношения (31) и (37), найдем  $\text{Im } Z_{0, n}^{(n)}(t) = 0$ , что согласуется с условиями (38). Из условий (38) можно заключить, что волновая функция  $Z_{mn}^{(n)}$  имеет место действительная, или чисто мнимая, поэтому уравнения (28) и (29) можно рассматривать как отнесенные к действительным частям  $Z_{mn}^{(n)}$  при четных  $m$  и к мнимым частям  $Z_{mn}^{(n)}$  при нечетных  $m$ . В результате идеем

$$\frac{\partial Z_{mn}^{(n)}(t)}{\partial t} = (-1)^m [m^{1/2} Z_{m-1, n}^{(n)} + (m+1)^{1/2} Z_{m+1, n}^{(n)}] +$$

$$+ m^2 \nu + \sum_{q=-\infty}^{\infty} E_{n-q} Z_{m-1, q}, \quad m, n = 0, \pm 1, 2, 3, \dots, \quad (39)$$

$$E_n(t) = \text{Im } E_n^{(n)}(t) = -\frac{n k_0}{(2\pi)^{1/2}} Z_{0, n}^{(n)}(t). \quad (40)$$

Если теперь задать функцию  $f(x, v, t)$ , которая в свою очередь определяет все  $Z_{mn}^{(n)}(t)$ , то можно решить уравнения (39) и (40) простым интегрированием по переменным. Но прежде чем выводить последнее интегрирование, нужно оборвать бесконечную сумму уравнений (39) и (40). В  $n$  -ом уравнении пераграфов переписаны возможные погрешности, которые возникают при таком оформлении поля как просто предположим, что

$$Z_{mn}^{(n)}(t) = 0 \quad \text{при } m > N \text{ или } n > N,$$

и можем применить обычные численные методы. Укажем при этом различные формы начальных условий  $f(x, v, 0)$ , которые были рассмотрены.

$$f(x, v, 0) = \exp(-v^2/2l^2) (1 + \nu \cos k_0 x). \quad (41)$$

Это распределение приводит к выражению Лапласа первоначально возбуждающей волновой функции  $k_0$  и в целом  $k_0$  и в целом

$$\text{методом возбуждающей волны с постоянными числами } k_0, \nu, \dots; \\ \text{методом возбуждающей волны с постоянными числами } k_0, \nu, \dots; \quad (42)$$

Это распределение описывает световое неустойчивое взаимодействие квантовые эллиптические плазмы, и короткая существующая нарастающая волна, если  $|k_0| > 1$  [19].

$$f(x, v, 0) =$$

$$= \frac{\exp(-v^2/2l^2)}{(2\pi)^{1/2}} \left[ v_0(v) + \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} v_0(v) \right] \left[ 1 + \nu \sum_{s=1}^{m-1} \cos m k_0 x \right]; \quad (43)$$

это распределение соответствует состоянию горла на высоте [29, 30], когда волна имеет большую основную скорость. Входит через отклонение более протяженной основной плазмы, в которой при достижении малых  $k_0$  неустойчиво несколько волн.



Во всех вышеуказанных случаях интересующие нас величины зависят только от нескольких отличных от нуля в начальном момент элементов матрицы  $Z_{mn}(t)$ . Класс функций распределения по скоростям, которые можно разложить в ряды Грама — Чарна ограничивается такими распределениями, для которых  $j(v) \rightarrow 0$  при  $v \rightarrow \pm \infty$  по крайней мере так же быстро, как  $v^n \exp(-v^2/2)$ . Например, для распределений Коши вида

$$f(v) = \frac{A}{(v^2 + b^2)^n}$$

такие разложения не подходят. Но указанное условие не является серьезным ограничением метода, поскольку физически широкое распределение по скоростям убывает достаточно быстро.

Так как численная проблема была сведена к интегрированию системы дифференциальных уравнений (36) вида

$$\frac{dZ_{mn}(t)}{dt} = G_{mn} Z, \quad (44)$$

где  $Z = \{Z_{mn}\}$  и  $G_{mn}$  — линейный алгебраический матричный оператор, то можно использовать несколько стандартных методов Рунге — Кутты или технику управляемой коррекции (predictor-corrector techniques). Мы использовали метод Рунге — Кутты четвертого порядка, предложенный Гиллом [37], ввиду простоты начала вычислений и изменения временного шага  $\Delta t$  по сравнению с методами управляемой коррекции. Этот метод четвертого порядка требует вычисления правой части уравнения (44) в четырех точках каждого интервала  $\Delta t$ . Следовательно, нужно предусмотреть запас в памяти машины для запоминания каждого из четырех подынтервалов в матрице размерностью  $6N$  (мы использовали тот факт, что для вычисления  $\dot{Z}_{mn}$  требуется только строки  $m \pm 1$ ). Алгоритм Гилла был записан в виде, который исключает необходимость запоминания самой матрицы  $Z$  во всех четырех точках подынтервала; как будет видно ниже, требуются только самые последние вычисления матрицы  $Z$ . Использовалась следующий алгоритм.

Обозначаем  $Z_{mn}^i(t) = Z_{mn}(j\Delta t)$  через  $Z_{mn}^i(j)$ , где  $j$  номеру интервала  $\Delta t$ , а  $i$  — подынтервалы. Тогда имеем

$$Z_{mn}^0(j) = Z_{mn}^0(j-1),$$

$$Z_{mn}^1(j) = Z_{mn}^0(j) + \frac{1}{2}(\Delta t) G_{mn}^0 Z_{mn}^0(j),$$

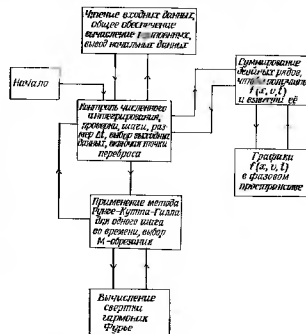
$$Z_{mn}^2(j) = Z_{mn}^1(j) + \Delta t \left\{ \left[ -1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right] G_{mn}^1 Z_{mn}^1(j) + \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} \right] G_{mn}^2 Z_{mn}^2(j) \right\}, \quad (45)$$

$$Z_{mn}^3(j) = Z_{mn}^2(j) + \Delta t \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right] G_{mn}^3 Z_{mn}^3(j) - G_{mn}^4 Z_{mn}^1(j) + \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} \right] G_{mn}^5 Z_{mn}^2(j) \right\},$$

$$Z_{mn}^4(j) = Z_{mn}^3(j) + \Delta t \left\{ \frac{1}{6} G_{mn}^6 Z_{mn}^4(j) + \frac{1}{3} (1 + \sqrt{2}) G_{mn}^7 Z_{mn}^1(j) - \frac{2}{3} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^{1/2} \right] G_{mn}^8 Z_{mn}^2(j) + \frac{1}{6} G_{mn}^9 Z_{mn}^3(j) \right\},$$

$$Z^0(j+1) = Z^4(j) \text{ и т. д.}$$

Было обнаружено, что для рассматриваемых задач ошибка обрывания цепочки уравнений в методе Гилла незначительна по сравнению с другими прогрессивными методами, поэтому не предпринималось никаких попыток улучшить основной алгоритм (45)



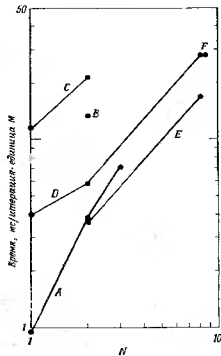
Фиг. 8. Упрощенная функциональная схема обобщенного метода, осуществляющего преобразование Фурье — Эрмита.

путем выключения членов, минимизирующих ошибку обрывания. В типичных расчетах ошибки обрывания оказались того же порядка, как и ошибки округления.

Используя вышеописанные методы, было составлено несколько последовательно более сложных вычислительных кодов Фурье; упрощенная функциональная схема показана на фиг. 8. Действующий вариант кода допускает (в среднем) шаг ввода данных:

- 1) ввод произвольных матриц  $Z_{mn}$ ;
- 2) выбор списка выходящих данных, включая  $Z_{mn}$ ,  $f(x, v, t)$ ,  $E(x, t)$  и т. д.;
- 3) графический вывод;
- 4) выбор процедуры обрешетки.

Кроме того, размер автоматически уменьшается, когда нужно сохранить сложную устойчивость. Нужно требует примерно  $M(N+3) + 262N + 2500$  слов общей памяти плюс еще примерно 2500 слов. Типичные значения  $M$  и  $N$  равны 100 и 3, 5 и 9. Для изучавшихся случаев пор проблем ограничениям служило машинное время, а не память. При расчетах для больших  $M$  и  $N$  время, затрачиваемое на ввод, примерно пропорционально  $MN^2$ . На фиг. 9 приведены графики времени, затрачиваемого на итерационные единицы  $M$ , для различных вариантов кода, которые использовались на разных машинах. Сравнение кривых  $B$  и  $C$  говорит о том, что требуется в 4 раза больший расход времени при использовании общего выражения и свертки Фурье, которое



Фиг. 9. Сравнение времен, которые требуются различными программами для разных вариантов преобразования Фурье — Эрмита.

A: IBM704, свертка Фурье вычисляется явно для каждого  $N$ , т. е. вычисляются отдельные коды для  $N=2$ , другой для  $N=3$  и т. д.; B: IBM 7044, свертка Фурье вычисляется, если известной код используется для всех выходящих данных N; C: KDF-6 (фирма «Инженеры инженерно», специализированный вариант, использующий матрицу свертки); D: GE 625, тот же код, что и для C; E: IBM 360-65, расчет выполняется с двойной точностью. Для получения полного времени расчета при заданном  $N$  нужно умножить на  $M$  и на число требуемых итераций.

зависимо менее эффективно, чем специально для данного значения  $N$ . Кривые C, D и E в силу соответствия тождественным кодам, используемым

трех разных машинах. Сравнение кривых E и F показывает, что выполнение арифметических действий с двойной точностью увеличивает продолжительность расчета примерно на 60%.

Надежность и точность кодов проверялась равными способами: сравнением с линейаризованной аналитической теорией в случаях, когда возмущения малы;

сравнением с точными аналитическими решениями для задачи свободного течения ( $E=0$ ); это обсуждалось в § 1, п. 2;

интегрированием по времени с последующим его обращением [уравнения (1) и (2) точно обратимы во времени];

вычислением полной энергии, которая сохраняется согласно уравнениям (1), (2) (полное число частиц точно сохраняется из-за самой формы преобразованных уравнений);

сравнением результатов численных расчетов с различными  $M$ ,  $N$  и  $\Delta t$ .

Не все из вышеуказанных проверок проводились в каждом частном случае, поэтому мы будем ссылаться на результаты разных численных расчетов.

Из линейной аналитической теории колебаний устойчивой плазмы следует, что  $E_n(t) \sim \exp[i\omega(nk_0)t]$ , где время  $t$  достаточно большое, чтобы исчезли эффекты от начальных условий. Если  $n=1$  и  $k_0=0,5$ , то результат аналитического расчета таков:  $\text{Re}\omega = 1,416$ ,  $\text{Im}\omega = 0,1534$ , а результаты численного расчета есть  $\text{Re}\omega = 1,412$  и  $\text{Im}\omega = 0,153$ ; эти результаты совпадают с той точностью, в пределах которой аналитические результаты известны из приближенных решений дисперсионного уравнения. Строго экспоненциальное поведение  $E_1(t)$  продемонстрировано на фиг. 10.

Уравнение свободного течения нейтрального газа [оно получается, если положить в (36) поле E равным 0] описывает развитие больших градиентов скорости, которые будут обсуждаться в п. 2. Хотя уравнение свободного течения обладает свойствами, которые затрудняют численное интегрирование, его точное аналитическое решение получается легко для всех времен. Если использовать начальные условия типа (41), то точное решение для матрицы  $Z_{mn}$  записывается в виде

$$Z_{mn}(t) = \frac{(mk_0 t)^{m-1} e^{-\frac{(mk_0 t)^2}{2}}}{[(2t)^{1/2} m!]^{1/2}} \exp\left[-\frac{(nk_0 t)^2}{2}\right], \quad n = \pm 1, m = 1, 2, 3, \dots, \quad (46)$$

$$Z_{mn}(t) = 0, \quad n \neq \pm 1.$$

Это решение сравнивается в табл. 1 и на фиг. 11 с решением, которое получается в результате численного интегрирования уравне-

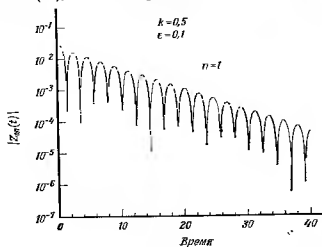
ния (39), когда все  $E_q = 0$ . Наблюдаемые расхождения оказываются порядка отпадавших накопившихся ошибок округления.

Таблица 8

Сравнение аналитического и численного решений для свободного течения

Время	$Z_{01}$		Расхождение	Число пикселей
	Численное решение	Аналитическое решение		
0	$0,31580038 \cdot 10^{-1}$	$0,315800380 \cdot 10^{-1}$	0,00	0
2	$0,19154749 \cdot 10^{-1}$	$0,191548377 \cdot 10^{-1}$	$-3,87 \cdot 10^{-8}$	80
4	$0,42739332 \cdot 10^{-2}$	$0,427401530 \cdot 10^{-2}$	$-2,21 \cdot 10^{-8}$	160
6	$0,35082784 \cdot 10^{-3}$	$0,350832540 \cdot 10^{-3}$	$-4,70 \cdot 10^{-9}$	240
8	$0,40522985 \cdot 10^{-4}$	$0,405232250 \cdot 10^{-4}$	$-1,24 \cdot 10^{-9}$	320
10	$0,41814119 \cdot 10^{-6}$	$0,417632009 \cdot 10^{-6}$	$-4,50 \cdot 10^{-10}$	400
12	$0,40854431 \cdot 10^{-8}$	$0,480777600 \cdot 10^{-9}$	$-6,04 \cdot 10^{-9}$	480

Для проверки обратимости во времени численных решений проводилось интегрирование по времени при неустойчивом начальном условии (42), а затем в обратном направлении на протяжении

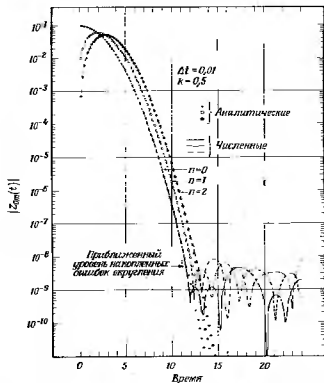


Ф и г. 10. Зависимость  $\log |Z_{01}(t)|$  от времени  $t$  для линеаризованного случая при  $N = 1$ , демонстрирующая экспоненциально затухающие слабые колебания [13].

800 временных шагов ( $20 \omega_p^{-1}$ ). Конечный результат для плотности заряда  $Z_{01}(0)$  отличился на 0,29% от начального значения; величина ошибки типична для всех матричных элементов  $Z_{mn}$ .

ошибка в несколько сот раз больше той, которая ожидалась от обрываний и округлений; возможно, что она связана с процессом обрывания по шапке  $m$  в этом расчете.

В недавнем расчете при неустойчивом начальном условии вида горб на хвосте [см. (43)] полная энергия сохранялась с точностью до  $10^{-8}$  в течение времени  $65 \omega_p^{-1}$ . Для сравнения укажем, что



Ф и г. 11. Сравнение численного и аналитического решений уравнения свободного течения для  $Z_{01}(t)$ , которое показывает величину ошибок округления и обрывания.

примерно 3% от начальной кинетической энергии частиц перешло в энергию волн. Однако полная энергия относительно нечувствительна к существенным ошибкам в  $f(x, v, t)$ , которые не распространяются на большие области фазового пространства. В упомянутом расчете полная энергия сохранялась очень хорошо, несмотря на то обстоятельство, что функции  $f(x, v, t)$  в малой области фазового пространства достигала небольших отрицательных значений. Тот факт, что функция  $f(x, v, t)$  в нескольких местах при-

нимала отрицательные значения, не был неожиданным в этом расчете, поскольку функция  $f(x, v, 0)$  в начальный момент равна нулю на линии  $v^2 = 3$ ; так что если ошибки при вычислении случаются, то половина значений функции  $f(x, v, 0)$ , равная нулю, смещается немного в область отрицательных значений. Участки отрицательных значений  $f$  едва ли влияют на то, есть ли необходимая информация об  $E_n(t)$ .

Универсальной проверкой точности численного решения является исследование его чувствительности к изменению различных используемых конечных разностей, в нашем случае  $\Delta t$ . В табл. 2 представлены итоги сравнения результатов для одного частного

Таблица

Сравнение  $Z_{01}$ , полученных для разных  $\Delta t$  при  $k=0,5$  и  $\epsilon=0,1$ 

Прям.	$Z_{01}$		Относительн.
	$\Delta t = 0,025$	$\Delta t = 0,0125$	
0	0,31580938-10 <sup>-1</sup>	0,31580938-10 <sup>-1</sup>	0,0
5	0,40238778-10 <sup>-1</sup>	0,40238960-10 <sup>-1</sup>	0,00680
10	0,23299353-10 <sup>-2</sup>	0,23268939-10 <sup>-2</sup>	0,0047
15	-0,18966850-10 <sup>-3</sup>	-0,18967476-10 <sup>-3</sup>	0,0033
20	-0,35462848-10 <sup>-3</sup>	-0,35463135-10 <sup>-3</sup>	0,00081
25	-0,33775979-10 <sup>-3</sup>	-0,33774903-10 <sup>-3</sup>	0,0032

расчета. Хотя оценки для ошибки обрывания в методах Рунге-Кутты неизбежно грубы, кажется, что отклонения в табл. 2 больше, чем можно было бы ожидать от случайно накопившихся ошибок обрывания; их величины соответствуют скорее прямому сложению ошибок. Даже в этом случае неопределенность в решении продемонстрированная в табл. 2, является вполне допустимой для любых известных приложений.

Дальнейшее обсуждение ошибок, особенно тех, которые возникают из-за обрывания рядов Фурье — Эрмита, будет приведено в п. 2. В качестве последнего замечания к описанию машины необходимо отметить, что наше внимание было сконцентрировано на информации, содержащейся в коэффициентах  $Z_{0n}(t)$  (дает азимутальное поле) и  $Z_{2,0}$  (дает кинетическую энергию частиц), поскольку эти величины представляют наибольший физический интерес. Можно было бы изучать другие матричные элементы и получить в общем подобные результаты, за исключением того, что для элементов близки границ матрицы ошибки будут значительно больше, чем указанные выше. К счастью, когда матрица достаточно большая, влияющие граничные элементы на физическую интересную информацию, содержащуюся в матрице, по-видимому, мало.

## 2. Трудности обрывания

Легко видеть, что уравнения (39) и (40) не образуют замкнутой системы ни по индексу Фурье  $n$ , ни по индексу Эрмита  $m$ . Перешедя к каждому члену, возникающий из выражения  $E(\partial f/\partial v)$ , связывает каждую моду Фурье с бесконечным набором других мод, а конвективный член, возникающий из выражения  $v(\partial f/\partial x)$ , связывает каждую моду Эрмита с соседними. Рассмотрим вначале эффект обрывания рядов Фурье.

Требования разлокаемости функции  $f(x, v, t)$  и  $E(x, t)$  в быстро сходящиеся ряды Фурье ограничивают класс начальных условий, для которых применим этот метод. В результате пригодными оказываются только те условия, для которых по крайней мере начальное состояние почти однородно, т. е. отношение

$$\epsilon = \frac{Z_{01}(0)}{Z_{0,0}(0)}$$

достаточно мало.

Проблемы ударных волн или оболочек могли бы потребовать другого набора базисных функций для пространственного разложения [38]. Обычным путем линеаризованное аналитическое решение уравнений (38) и (40) описывает эволюцию малых возмущений однородного начального состояния. Этот метод создает основу для изучения эффекта обрыва рядов Фурье в нелинейной задаче. Численно было обнаружено, что если в начальный момент в устойчивом состоянии (имеется затухание Ландау) возбуждена волна с  $n-1$  и амплитудой  $\epsilon$ , то потом нелинейно развивающаяся  $n$ -я гармоника до амплитуды  $O(\epsilon^2)$ . Требуемая точность численных решений получается в результате выбора начального набора  $\epsilon$  и  $k_0$  и просчета задачи для нескольких возрастающих значений  $N$ , пока изменения (при фиксированном времени) величин, которые нас интересуют (обычно это  $E_n$ ), станут меньше чем допустимые погрешности. В табл. 3 сравниваются значения  $Z_{01}(t)$  и  $Z_{02}(t)$ , полученные при одних и тех же устойчивых начальных условиях; формула (41) с  $k_0 = 0,5$  и  $\epsilon = 0,25$ , причем в последующих расчетах использовались  $N = 2$  и  $N = 3$ . В этом случае наиболее значительный отклонений порядка  $O(\epsilon^2) = 1,6\%$ . На самом деле значения  $Z_{01}(t)$  оказались меньше чем  $O(\epsilon^2)$ , а изменения  $Z_{02}(t)$  гораздо больше; скорее всего заурядно, потому что введение третьей гармоники возмущает фазу второй. Если бы была бы необходима более точная информация о второй гармонике, то требовался бы счет с  $N = 4$  для установления сходимости. Главным препятствием для расчетов с большим числом гармоник Фурье является время вычислений, которое возрастает как  $N^2$ .

При неустойчивых начальных условиях число  $N$  выбирается так, чтобы необходимая сходимость получалась при ограниченной амплитуде. Обычно, если  $N$  содержит две или более волн,

Сравнение результатов второго и третьего порядков:  $k = 0,5$ ,  $v = 0,25$ 

Время	Z <sub>2</sub>		Z <sub>3</sub>		Точность %, %	Точность
	Второй (N=2)	Третий (N=3)	Второй	Третий		
0	0,78652547 · 10 <sup>-1</sup>	0,78652947 · 10 <sup>-1</sup>	0,0	0,0	0	0,0
5	0,23938275 · 10 <sup>-1</sup>	0,23937547 · 10 <sup>-1</sup>	0,026	0,54944769 · 10 <sup>-3</sup>	0,026	0,39820417 · 10 <sup>-3</sup>
10	0,45308043 · 10 <sup>-2</sup>	0,45302911 · 10 <sup>-2</sup>	0,144	0,59144930 · 10 <sup>-4</sup>	0,144	-0,54313374 · 10 <sup>-4</sup>
10	0,31100715 · 10 <sup>-2</sup>	0,31371019 · 10 <sup>-2</sup>	0,881	0,73183856 · 10 <sup>-4</sup>	0,881	0,2037195 · 10 <sup>-4</sup>

устойчивых в линейном приближении то сходимость оказывается удовлетворительной. Наш опыт показал, что в рассмотренных задачах обрывание рядов Фурье приводит к гораздо менее серьезным трудностям, чем те, которые возникают при обрывании рядов Эрмита.

Вызывающие беспокойство большие производные функции  $f(x, v, t)$  по скорости, которые возникают из конвективного члена уравнения Власова, явно видны в решении уравнения для свободного течения; замечания, которые будут сделаны сейчас, опосредуются в уравнении для свободного течения, и они применимы и к случаю излома. Коэффициент по номером  $m$  растет как  $t^m \exp[-(nk_0^2/2)t]$  до максимального (или минимального) значения величины

$$Z_{min}^{max} = \varepsilon^m \frac{\varepsilon}{2} \frac{(m)^{m/2}}{(2\pi i m)^{1/2}} \exp\left(-\frac{m}{2}\right), \quad (4)$$

которую при больших  $m$  можно записать в виде

$$Z_{min}^{max} = \frac{\varepsilon^m \varepsilon}{2(2\pi i)^{1/2}} \exp(-m). \quad (4)$$

Этот максимум (или минимум)  $m$ -коэффициента достигается в момент

$$t = \frac{\sqrt{m}}{nk_0}, \quad (4)$$

причем скорость, с которой коэффициент, достигающий максимума, движется в сторону больших  $m$ , равняется

$$\frac{dm}{dt} = 2nk_0^2 t, \quad (5)$$

где  $m$  рассматривается как непрерывная переменная. Формулы (4) — (5) показывают, что имеется тенденция нарастания для коэффициентов при больших  $m$  и что «скорость», с которой начальное возмущение затронутую область  $m$ , нарастает с ростом

Каким бы мы не выбирали граничное  $M$ , коэффициенты на этой границе станут большими за время  $t = \sqrt{M/(nk_0)}$ . В результате нельзя просто пренебречь влиянием от  $Z_{M+1, n}(t)$  и уравнения для  $Z_{M, n}(t)$ , поскольку  $Z_{M+1, n}(t)$  и  $Z_{M-1, n}(t)$  велики и имеют противоположные знаки, почти сокращая друг друга в уравнении для  $Z_{M, n}(t)$  (см. (39)). Поэтому нужно восстанавливаться одним из следующих рецептов:

а) Остановить вычисления в какой-то момент  $t \leq \sqrt{M/(nk_0)}$ ; выбрать  $M$  достаточно большим, чтобы получить решения для требуемого момента времени.

б) Использовать то свойство системы (39), что уравнения для  $Z_{0, n}$  содержит только  $Z_{M+1, n}$  и  $Z_{M-1, n}$ , и уменьшать  $M$  на единицу при каждом шаге во времени, начиная с момента  $t = \sqrt{M/(nk_0)}$ . Тогда можно выиграть дополнительный интервал времени  $M\Delta t$  и сохранить точное решение.

в) Помешать тому, чтобы  $Z_{M, n}$  когда-либо стали быстро нарастать, с помощью введения какого-либо искусственного члена в уравнение (1), чтобы ослабить большие производные по скорости (см. [19, 20] и п. 3 настоящей главы).

г) Точно вычислять  $Z_{M+1, n}(t)$  по известным  $Z_{M, n}$ ,  $Z_{M-1, n}$ ,  $Z_{M-2, n}$  и т. д. с помощью какой-нибудь экстраполяции.

Рецепты «а» — «г» успешно использовались для разных проблем, но, хотя были затрачены значительные усилия, до сих пор еще не найдена удовлетворительная (численно устойчивая) экстраполяция. При использовании рецептов «а» — «г» действующий вариант кода упрощается в результате вычисления всех  $Z_{min}^{max}$  вплоть до значений  $m$ , при которых коэффициенты  $Z_{min}^{max}$  становятся меньше некоторой заранее заданной величины. Эта особенность обеспечивает очень быстрое вычисление, пока матрица  $Z$  мала по начальной стадии.

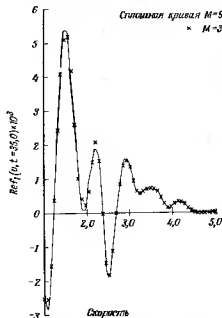
Из вида системы (39) можно заключить, что при увеличении числа  $M$  для численной устойчивости нужно уменьшать  $\Delta t$ . Привиня к системе (39) грубое приближение конечных разностей, получаем (полагаем  $E = 0$ )

$$\frac{\Delta Z_{m, n}}{\Delta t} = \delta m^{1/2} nk_0 Z_{m, n}, \quad (54)$$

где  $\delta = (Z_{m+1, n} - Z_{m-1, n})/Z_{m, n}$ . Для того чтобы величина  $\Delta Z_{m, n}/Z_{m, n}$  была малой, необходима малость величины  $\delta m^{1/2} nk_0 \Delta t$ . На практике  $\delta$  довольно мало; поэтому если  $m^{1/2} \Delta t nk_0 \leq 1$ , то вполне имеет место численная устойчивость. Обнаружено, что этот критерий работает хорошо.

Наконец, рассмотрим, как влияет на функции  $f_n(v, t)$  обращение высших коэффициентов Эрмита. На фиг. 12 приведено сравнение функций распределения с  $n = 4$ , которые получены

соответственно при учете 960 и 360 членов в рядах Эрмита. Различия представляют истинное решение, полученное в случае, когда допускалось увеличение числа коэффициентов Эрмита по мере необходимости. На фигуру видно, что разложение с  $M = 360$



Ф и г. 42. Сравнение функций  $\text{Re } f_1(v, t = 35,0)$ , полученных в виде разложения Эрмита с 960 и 360 членами для рассматриваемого случая. Наибольшее хорошее согласие во всем пространстве скоростей.

дает почти ту же самую функцию  $f_n(v, t)$ , как и разложение с  $M = 960$ . Ответ же с  $M = 360$  является ли достаточным разложением с 360 членами, зависит от того, насколько точно нужно вычислять форму  $f_n(v, t)$ . В рассмотренном случае можно было ограничиться  $M = 360$ . Остальные 600 коэффициентов были удержаны в качестве «гарантии» против распространения искаженной информации, возникающей на границе матрицы, возникающей на границе матрицы. Если необходима экономия времени вычислений или требуется более точная информация о  $f_n(v, t)$ , то можно уменьшить величину  $M$ .

### 3. Модификация для столкновений

В этом пункте мы будем в основном следовать Гранту и Финсу [19, 20]. Один из способов преодоления трудности неограниченного увеличения числа подмоментов Эрмита, необходимых для представления функций  $f(x, v, t)$ , связан с введением некоторого члена в правую часть уравнения (1) для создания сглаживающего эффекта столкновений в пространстве скоростей. «Столкновительные» члены, которые можно использовать в одномерном случае и которые для одного сорта частиц фиксированы, не обязаны точно представлять истинные соударения между дискретными частицами.

Одна из форм столкновительного члена, которая использовалась, получается из модели Бхатагара — Гросса — Крукса:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = -\nu_c \left[ f(x, v, t) - n(x) \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \right]. \quad (5)$$

Если  $n(x) = N$ , где  $N$  — постоянная, то функция  $f(x, v, t)$  стремится к пространственно-однородному максвелловскому распределению, а если  $n(x) = \int f(x, v, t) dv$ , то  $f_n(v, t)$  стремится к максвелловскому распределению. После разложения Фурье — Эрмита выражение (52) записывается в виде

$$\begin{aligned} (\dot{Z}_{mn})_c &= -\nu_c Z_{mn}(t), \quad m \neq 0, \\ (\dot{Z}_{0n})_c &= -\nu_c [Z_{0n}(t) - N], \quad \text{если } n(x) \text{ — константа,} \\ (\dot{Z}_{0n})_c &= 0, \quad \text{если } n(x) = \int f(x, v, t) dv. \end{aligned} \quad (53)$$

В таком виде столкновительный член не обладает избирательной способностью в пространстве полиномов Эрмита, действуя одинаково почти на все коэффициенты. В этом случае отсутствует тенденция к преимущественному сглаживанию тонкой структуры функций  $f(x, v, t)$ .

Более эффективным упрощенный член типа Фоккера — Планка [39—41]

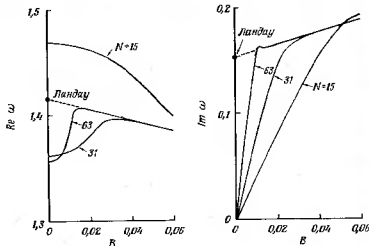
$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_c = \nu_c \left[ \frac{\partial (cf)}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right], \quad (54)$$

приводящий к представлению [19, 20]

$$(\dot{Z}_{mn})_c = -\nu_c m Z_{mn}(t), \quad (55)$$

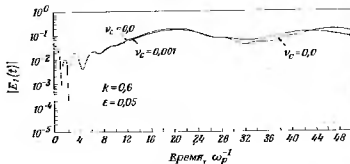
которое вызывает преимущественное подавление высших коэффициентов Эрмита. Грант и Финс показали [20], что при  $M\nu_c \sim O(1)$  добавление члена (55) в уравнения (28) и (29) устраняет нарушенные представления в момент  $t = \sqrt{M/Nk_0}$ ; однако столкновительные эффекты становятся доминирующими после момента  $t = 1/\nu_c = M$ . Временной интервал, в течение которого можно приблизительно изучать бесстолкновительные явления, простирается от  $t = \sqrt{M/Nk_0}$  до  $M$ . Если  $Nk_0 < 1/\sqrt{M}$ , то, очевидно, нежелательно вообще вводить столкновительный член. При указанных начальных условиях эффект от столкновений должен суммироваться с затуханием Ландау. На фиг. 13 представлена зависимость  $\text{Re } \omega$  и  $\text{Im } \omega$ , полученных из линеаризованных разложений Фурье — Эрмита, от  $\nu_c$  и  $M$ . В дальнейшем случае столкновительный член конкурирует с волнами во взаимодействии с функцией распределения; столкновения стремятся сохранить  $f'_k(v = \omega/k) < 0$ , в то время как нелинейное взаимодействие с волнами ведет к  $f'_k(v = \omega/k) \rightarrow 0$ . Следовательно, когда форма  $f_k(v)$  существенно влияет на интересные, которые нас интересуют, нужно вычислять влияние столкновительного члена.

На фиг. 14 при неустойчивых начальных условиях [см. (48) сравниваются функции  $E_1(t)$ , полученные со столкновительным



Фиг. 13. Сходимость результатов для действительной и мнимой частей полученных на линейрезонансных разложениях Фурье — Эрмита, к результатам Ландау в зависимости от частоты соударений  $B$  и числа оставленных коэффициентов Эрмита ( $N$  в этом случае).

При  $NB \approx 4$  вновь получаются результаты Ландау [30].



Фиг. 14. Зависимость  $\log |E_1(t)|$  от  $t$  для неустойчивого случая, деформирующим воздействие столкновительного члена на развитие  $E_1$  по сравнению [14].

членом в форме (54) и без него. Столкновительный член не вносит никаких-либо качественных изменений. В этом случае интересен предельной амплитудой  $E_1(t)$  и характером состояния си-

мы, и использование столкновительного члена позволило существенно сэкономить машинное время.

Столкновительный член в виде (54) был подробно изучен в работе Диневита и др. [42] с использованием аналитических и численных методов.

#### 4. Краткая сводка результатов

В этом пункте кратко перечислены задачи, которые исследовались с помощью метода разложения Фурье — Эрмита или какого-либо близкого к нему метода. Большая часть исследованной явно оказалась успешной: они по-новому осветили важные физические проблемы. Порядок, в котором обсуждаются эти проблемы, не отражает наших взглядов на их относительную важность, а исходит из довольно приближенной последовательности появления результатов (заранее извещаемая за любой пропуск работы, с которой мы, по-видимому, незнакомы). Мы стремились полностью доверить исследователям каждой задачи, которые использовали разложения по ортогональным полиномам.

##### а. Последнее затухание Ландау в устойчивой плазме

В максвелловской плазме возбуждаются волны с большими амплитудами и изучается последующее затухание и нелинейное взаимодействие волн с функцией  $f(x, v, t)$ . Обнаружено, что вначале затухание волн происходит быстрее, чем по Ландау, что обусловлено, вероятно, сильным захватом резонансных частиц волнами. Число частиц в распределении  $f_0(v, t)$  со скоростями, меньшими, чем фазовая скорость волны, уменьшается, а со скоростями, большими чем фазовая скорость, увеличивается в соответствии с картиной взаимодействия резонансных частиц. Декремент затухания  $\gamma(t)$  падает с течением времени, становясь при больших временах гораздо меньше декремента линейной теории, если уровень начального возбуждения достаточно высок. Наиболее важными нелинейными членами в уравнении Власова для определения временной эволюции электрического поля являются, очевидно, члены  $E_1(\partial_t^{-1} \partial v) + E_{-1}(\partial_t \partial v)$ , которые дают вклад второго порядка в  $f_0(v, t)$ . Была успешно построена нелинейная аналитическая теория [43], основанная на вышеуказанном допущении, которая дает  $\gamma(t_n)$  и  $f_0(v, t_n)$ , где  $t_n$  — асимптотическое время. Этой проблемой занимались Армстронг [42, 43], Грант и Фиск [19, 20], а также Садовский [21].

##### б. Слабо неустойчивые взаимодействующие плазмы

Была изучена эволюция начального состояния, соответствующего двум взаимодействующим лучам электронов (начальное условие вида (42)) в достаточно короткой периодической системе,

такой, что только волна  $n = 1$  оказывалась устойчивой. Число  $N$  выбиралось таким, чтобы включить несколько устойчивых гармоник для обеспечения сходимости рядов Фурье. Результаты численных расчетов показали, что из-за нелинейных эффектов нарастание прекращается после того, как малая доля энергии перейдет в энергию электрического поля, и что система длительное время приближается к неупорядоченному равновесному состоянию. Эта проблема изучалась Армстронгом [12, 13], Граттом и Фиксом [19, 20], а также Армстронгом и Монтгомери [14].

#### в. Одномерный плазменный диод

Эта задача упоминается нами, поскольку в ней используется метод решения уравнения Власова при менее строгих периодических граничных условиях. Метод, использованный Ломаксом [1], включает в себя разложение функции распределения по полюсам Лагерра. Этим методом были получены характеристики диода.

#### г. Воздействие внешнего электрического поля на электронную плазму

Эта проблема будет обсуждаться в § 4.

#### д. Эхо плазменных волн

Крупенфилд и Бродвэс [34] применили метод разложения Фурье — Эрмита для случаев, когда в устойчивую плазму дельта-функции возмущения в разные моменты времени. В соответствии с аналитической теорией [23] в более позднее время появляется «волна-эхо». Форма отблуждающей волны-эхо, зависимость амплитуды от возмущения и величина запаздывания согласуются с предсказаниями аналитической теории. Волна-эхо появляясь, несмотря на то, что электрические поле обих приложенных возмущений убывает из-за затухания Ландау. Возмущения дельта-функции вкладывают в функцию распределения, которые могут стать когерентными по фазе и вызывать волну-эхо. Введенных столкновений, которые воздействуют на незатухающую часть функции распределения, сильно уменьшает амплитуду [45, 46]. Предварительные численные результаты при упорядоченной согласуются с предсказаниями аналитической теории. В дальнейшем планируется исследование ролика с большой амплитудами.

#### е. Нелинейные звуко-акустические волны

Эта проблема будет рассмотрена в § 4, п. 3.

#### и. Слабая неустойчивость типа «горб на хвосте»

Изложенные в п. 1 методы были недавно применены [46] для начальных условий вида [43]. Этот случай соответствует двум редким пучкам электронов (со скоростями  $\pm U_0$ ), которые проходят через более плотную основную плазму. Конкретной целью такого выбора начальных условий являлось стремление выяснить область применимости квазилинейной теории [47, 29, 31], которая, по-видимому, применима к слабым неустойчивостям такого типа. Были проведены вычисления для восьми волн, четыре из которых были линейно неустойчивыми ( $n = 2, 3, 4, 5$ ); волна  $n = 1$  была устойчивой и незатухающей, тогда как волны  $n = -6, 7, 8$  сильно затухали. Как и ожидалось, нелинейные процессы привели к тому, что «свадьба» функции распределения между основной плазмой и пучком запаздывает; результатом, неожиданным с точки зрения квазилинейной теории, являлось преобладание в состоянии с большими амплитудами волны с наибольшей инкрементом нарастания. Более  $\frac{1}{2}$  энергии электрического поля при максимальной амплитуде было сконцентрировано в наиболее неустойчивой волне. Преобладание одной волны было приписано тому факту, что в начальный момент волны возбуждались с амплитудами, примерно в 20 раз меньшими предельной амплитуды, и наиболее быстро нарастающая волна обгоняла другие. Ширина захвата наибольшей волны перекрывала фазовые скорости других неустойчивых волн; следовательно, наибольшая волна была способна нелинейно «впитать» другие волны. На основе результатов этого исследования можно предположить, что для применимости обычной квазилинейной теории необходимо, чтобы амплитуды начального возбуждения не были слишком малы по сравнению с предельной амплитудой.

### § 4. Обобщение метода разложения Фурье — Эрмита

Основное разложение Фурье — Эрмита, описанное в § 3, можно использовать с соответствующими модификациями для решения более общих вариантов в нелинейной системе уравнений Власова — Пуассона. Обобщении на случай двух измерений обсуждается в гл. 5, а в этом параграфе мы обсудим только дополнения к одномерной модели.

В п. 1 и 2 мы обобщим нашу модель на случай электрических полей, изменяющихся во времени или стационарных, которые, по предположению, поддерживаются силами, внешними по отношению к электронной плазме. Обобщение на плазму с подвижными ионами в электромагнитном поле обсуждается в п. 3. Большая величина отделимости массы иона к массе электрона приводит к тому, что явления, связанные в основном с движением ионов, развиваются



ва гораздо больше времени, чем явления, связанные в основном с движением электронов. По этой причине движение электронов рассматривается отдельно, а упомянутая модель названа *гибридной моделью*.

### 1. Обобщение на случай внешних полей

Основные электростатические явления в электронной плазме имеют характерные длины порядка электронного дебаевского радиуса экранирования и частота порядка электронной плазменной частоты. Однако в экспериментах встречаются случаи, когда явления не связаны непосредственно с этими масштабами. Такие случаи можно исследовать с помощью представления Фурье Эрмита при наличии электрического поля или потенциала, которые сохраняются независимыми от процессов в плазме. Такие независимые поля мы будем называть внешними полями, что отличает их от полей, которые вычисляются самосогласованно по функциям распределения электронов, и будем считать их названными функциями координат и времени.

#### а. Включение внешних полей

Распределение электрического заряда в системе определяет электрическое поле  $E$  (или, что эквивалентно, потенциал  $\varphi$ ) через уравнение Пуассона

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial E}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f dv,$$

где правая часть дает полную плотность заряда. Как уже отмечалось в этой главе, «1» в правой части есть нормированная однородная плотность неподвижного ионного фона, а интеграл по скоростям от функции распределения электронов дает плотность заряда электронной плазмы.

Для моделирования эффекта внешнего поля (или потенциала) в нашей системе мы просто добавим в правую часть уравнения плотность заряда эквивалентного источника, которая и в дальнейшем могла бы дать нужное внешнее поле (потенциал). Обозначим эту дополнительную плотность заряда через  $\rho_{\text{внешн}}$  и будем считать ее известной функцией  $x$  и  $t$ . Решение связанных уравнений Пуассона и Пуассона проводится, как и раньше, но теперь мы решим скорее смешанную задачу, чем чистую задачу с начальными условиями.

Если разложить новый член в уравнении Пуассона по компонентам Фурье  $\rho_n(t)$  и подставить его в преобразование по Фурье уравнение Пуассона, то вместо соотношения (31) получим следующее

имеет:

$$E_n(t) = \frac{i(2\pi)^{1/2} v_c}{nk_0} [Z_{0n}(t) - \rho_n(t)], \quad n \neq 0.$$

Таким образом, плотность заряда внешнего источника определяется коэффициентами Фурье  $\rho_n(t)$ , являющимися заданными функциями времени для любого частного случая, который мы хотим рассмотреть.

В экспериментах с плазмой обычно не контролируют непосредственно плотности заряда или электрические поля, а вместо этого измеряют электрический потенциал на разных поверхностях внутри или вокруг плазмы. В частности, мы намереваемся смоделировать эксперимент [48], в котором ряд кольцевых дисков равномерно размещался вдоль и поперек плазменного столба. На диски подавался потенциал, который изменялся синусоидально во времени с высокой частотой, причем потенциалы соседних дисков были сдвинуты по фазе на  $180^\circ$ .

Плотность заряда эквивалентного источника для такого потенциала представляет собой ряд  $\delta$ -функций Дирака, знаки которых чередуются и которые зависят от времени как  $\sin \omega_p t$ . Коэффициенты Фурье  $\rho_n$  для такой плотности заряда в виде  $\delta$ -функций отличны от нуля только для нечетных  $n$  и одинаковы для всех нечетных  $n$ .

Из-за ограниченности машинного времени и памяти большинство наших расчетов нужно было ограничивать только тремя компонентами Фурье функции  $f$ , а именно  $n = 0, 1$  и  $2$ . Следовательно, для распределения в виде  $\delta$ -функций можно было использовать только компоненту  $\rho_1(t)$  плотности  $\rho_{\text{внешн}}$ . Это не является серьезным ограничением, поскольку большая часть физической информации связана с эволюцией первых двух компонент Фурье функции распределения электронов,  $f_0(v, t)$  и  $f_1(v, t)$ .

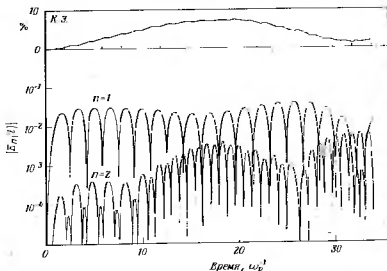
Это показывает, что вычисление функции распределения может быть более дорогим, чем прямое моделирование частиц, если необходимо одновременно изучать равнине большого числа мод. С другой стороны, расчеты по методу разложения могут быть полностью бесстолкновительными и могут дать точную возмущенную функцию распределения при очень малых уровнях сигнала. Сравнение уменьшенное столкновительного и статистического шумов при прямом моделировании частиц потребовало бы очень большого числа частиц.

#### б. Внешние поля, зависящие от времени

Отклик электронной плазмы на осциллирующее внешнее поле измеряется в двух диапазонах частот:  $\omega_0 \geq \omega_{pe}$  и  $\omega_0 \ll \omega_{pe}$ , где  $\omega_{pe}$  — плазменная частота электронов.

а)  $\omega_0 \geq \omega_{pe}$ . В этих расчетах нужно было определить амплитуду, частоту и фазу *отклика* электронов на внешнее (возбуждаю-

щее) поле и наблюдать получающееся изменение функции распределения. Мы хотели количественно сравнить эти величины в сл случае, когда амплитуда возмущения становится выше уровня, на котором проявляются нелинейные эффекты. Эти нелинейные эффекты по природе аналогичны тем, которые описаны в § 3 (физически они связаны с захватом частиц электрическим полем).



Фиг. 15. Отклик электронной плазмы на возбуждаемое внешнее электрическое поле.

Кривые  $n=1$  и  $n=2$  дают абсолютные значения первого и второго коэффициентов Фурье электрического поля частиц. Кривая К.Э. показывает увеличение (в %) потенциальной энергии электронами. Симулированное возбуждающее поле имеет амплитуду  $\epsilon_0 = 0,816$ , частоту  $\omega = 1,924$  и фазовую скорость  $v = 0,9538$ . Внешнее электрическое поле равно сумме внешнего поля частиц и возбуждающего поля.

Их было гораздо труднее изучать в предшествующем случае (внешнего возбуждения, поскольку возмущенное поле было затухало и захваченные частицы быстро освобождались).

На фиг. 15 приведены результаты одного расчета. Кривые с шдсисами  $n=1$  и  $n=2$  дают абсолютные значения первого и второго коэффициентов Фурье той части полного электрического поля, которая связана только с электронами плазмы (т. е. с полным полем было вычтено внешнее поле). Кривая с надписью К.Э. показывает увеличение полной кинетической энергии электронов в процентах. На протяжении первых 17 временных периодов захваченные электроны стбигают энергию от возбуждающего поля; на протяжении следующих 15 временных периодов с

отдают большую часть этой энергии. В отличие от ситуации в § 3 полная энергия здесь не сохраняется, поскольку внешнее поле не является самосогласованным.

б)  $\omega_{pe} < \omega_{pe}$ . В этих расчетах внешнее поле выбиралось таким, чтобы оно возмущало плотность заряда волнового фронта, который сциллирует гораздо медленнее, чем электронная плазма. Ставится задача: выяснить, могут ли электроны изменять свои скорости и распределение в пространстве таким образом, чтобы сохранить постоянным отношение давления

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(x, v, t) dv \text{ к плотности } n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v, t) dv.$$

Это отношение менялось не более чем на 2%, когда осциллирующее возмущение фона составляли 15%.

## 2. Вычисления для случая неоднородного равновесного состояния

За исключением случаев неустойчивых начальных условий в § 3, равновесное состояние в описанных расчетах было пространственно однородным. Известно [49, 50], что уравнения (1) и (2) имеют не зависящие от времени решения, которые соответствуют неоднородным электрическим полям. Аналитические исследования устойчивости равных состояний неоднородного равновесия были проведены Монгомери [51], Лоу [52], Пирлштейном [53], Фридбергом [54] и Кипором [55]. Здесь мы нелинейные результаты численного исследования [17, 48] затухания Ландау возмущений одного конкретного неоднородного равновесного состояния.

Интегралом движения для электрона является его полная энергия, которая равна сумме его кинетической и потенциальной энергий и в безразмерной форме записывается в виде  $\xi = v^2/2 - \varphi(x)$ . Любая функция  $f$  от этого интеграла движения является решением уравнения Власова. Если функции  $f[v^2/2 - \varphi(x)]$  и  $\varphi(x)$  найдены самосогласованно из уравнения Пуассона, то мы получим неоднородное равновесное состояние. Давайте построим такое равновесное состояние.

Выверим плотность заряда неоднородного фона в виде  $\rho_{\text{фон}} = -\epsilon \cos k_{\text{фон}} x$  (не зависит от времени), а функцию распределения в виде

$$f(x, v) = \frac{a}{(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{v^2}{2} + \varphi(x)\right]. \quad (57)$$

Теперь нужно подставить  $f$  и  $\rho_{\text{фон}}$  в уравнение Пуассона и определить  $\varphi(x)$ .

Рассмотрим такие решения  $\varphi(x)$ , которые определяются те же первыми членами разложения Фурье по косинусам

$$\varphi(x) = A_1 \cos k_0 x + A_2 \cos 2k_0 x + A_3 \cos 3k_0 x + \dots$$

причем  $|A_1| \gg |A_2| \gg |A_3|$  и т. д., а  $A_1$  выбирается достаточно малым, чтобы разложение экспоненты  $\exp \varphi \approx 1 + \varphi + \varphi^2/2 + \dots$  шло достаточно быстро. Подставляя эти разложения в функцию в уравнение Пуассона и оставляя члены до третьего порядка (получаем следующие соотношения, которые содержат  $A_1$  и

$$a = \frac{1}{1 + (A_1^2/4)}, \quad A_2 = \frac{-aA_1^2}{4(a + 1/4k_0^2)}, \quad A_3 = \frac{-aA_1}{24} \frac{A_1^2 + 12A_2}{a + 9k_0^2/8},$$

$$\varepsilon = 2\rho_1 = A_1(a + k_0^2) + aA_1 \frac{A_1^2 + 4A_2}{8}.$$

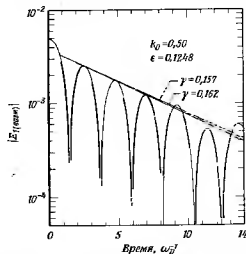
Поскольку функция распределения считается максвелловской (т. е.  $f(v) \sim \exp(-v^2/2)$ ), нетрудно найти отличные от нулевые равновесные матричные элементы  $Z_{01}$ ,  $S_{02}$  в  $Z_{03}$  любой заданной паре величин  $k_0$  и  $A_1$  ( $Z_{00}$  равно  $(2\pi)^{-1/2}$ ).

Паденные таким образом равновесные коэффициенты  $Z_{0n}$  используются в качестве начальных значений, чтобы посмотреть, насколько хорошо они представляют зависящее от времени решение уравнения (28).

Средней пары величин  $A_1 = 0,1$  и  $k_0 = 0,5$  было найдено, что коэффициент  $Z_{01}$  осциллирует амплитудой порядка 0,1% около своего вычисленного равновесного значения. После двух или трех попыток можно уменьшить амплитуду колебаний до 0,0006%, исправляя входную величину в пределах 0,001%. (Вычисления проводились на ИВМ)

которая имеет 8 цифровых разрядов, причем члены, содержащиеся в вычислениях.) При меньших  $k_0$  вычисленные коэффициенты

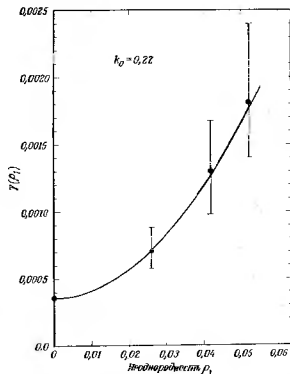
оказывались даже более точными. Остающиеся малые колебания можно рассматривать как эффективный шум фона для такой численной модели неоднородного равновесия. Таким образом, эта процедура «настройки» применяется для уменьшения уровня шума



Фиг. 16. Затухание возмущения при стандартном неоднородном равновесном состоянии, которое иллюстрирует наличие декремента затухания  $\gamma$  для случая с волновым числом  $k_0 = 0,50$  и неоднородностью  $\varepsilon = 2\rho_1 = 0,125$ .

Выводы в каждом из двух примеров даны указывают на необходимость в вычислении  $\gamma$ , когда  $E_1$  (возм.) превышает уровень шума фона.

оказывались даже более точными. Остающиеся малые колебания можно рассматривать как эффективный шум фона для такой численной модели неоднородного равновесия. Таким образом, эта процедура «настройки» применяется для уменьшения уровня шума



Фиг. 17. Декремент затухания Ландау  $\gamma$  как функция возрастающей неоднородности  $\rho_1$  при  $k_0 = 0,22$ . Точечные кривые (см. Б6) получены в предположении, что собственной функцией неоднородного поля является функция Митте-Лебланда, где  $q = 40,438E$ .

до возможно меньшего уровня, с тем чтобы можно было до тех пор следить за малыми возмущениями равновесного состояния, пока они не затухнут до уровня шума.

Для равновесного набора коэффициентов  $Z_{00}$ ,  $Z_{01}$  и  $Z_{02}$ , полученного при заданном  $k_0$ , измерялся неоднородное затухание Ландау при использовании исходного значения  $Z_{01}$  (возмущение) = 1,05  $Z_{01}$  (равновесное). Электрическое поле возмущения было  $E_1$  (возм.) =  $E_1$  (равновес.) -  $E_1$  (равновесное). Для таких малых возмущений нелинейные эффекты незначительны и амплитуда

возмущения падает экспоненциально во времени до тех пор, пока она не достигнет уровня шума фона, т. е.  $E_{\text{шум}}(t) = E_{\text{шум}}(0) \exp(-\gamma t)$ , где  $\gamma$  — постоянная величина для линейного затухания Ландау. Результаты пробного расчета с относительно большим  $\gamma$  приведены на фиг. 16. Для однородного равновесного состояния с  $k_0 = 0,50$  декремент линейного затухания Ландау равен  $0,154$ . В пробном расчете использовались  $k_0 = 0,50$  и неоднородность  $\varepsilon = 2r_1 = 0,125$ . Из полулогарифмического графика находим  $\gamma \approx 0,160$  для малых времен, пока  $E_1$  (шум), не затухнет до уровня фона.

Декремент затухания  $\gamma$  измерился таким способом для нескольких волновых чисел  $k_0$  при одной и той же степени неоднородности (которая определялась величиной  $A_1$ ) и для нескольких степеней неоднородности при заданном  $k_0$ . Было обнаружено, что  $\gamma$  возрастает по отношению к величине декремента *однородного* затухания, когда степень неоднородности увеличивается, причем это нарастание происходит быстрее при малых  $k_0$  в соответствии с теорией неоднородного затухания [56]. Хотя эта теория не применима в полной мере к рассматриваемому случаю, измеренное увеличение  $\gamma$  оказалось в удивительно хорошем согласии с предсказаниями теории. Это согласие продемонстрировано на фиг. 17.

### 3. Гибридные модели

#### а. Нелинейные ионные волны

Наибольшим препятствием при любом численном решении уравнения Власова в случае двухкомпонентной плазмы является значительное расхождение временных масштабов у электронов и ионного движения. При реальном соотношении масс электроны должны были бы совершить за то же время примерно в 40 раз больше колебаний, чем ионы. Поэтому трудно получить даже несколько ионных колебаний, если только рассматривать движение электронов. Эту трудность можно обойти двумя путями: уменьшить отношение  $m_e/m_i$ , и, следовательно, сблизить временные масштабы или положить  $m_e = 0$ . Здесь будет описана модель, предложенная Дусетом<sup>1)</sup> для определения вклада электронов в плотность заряда, которую можно объединить с уравнениями (1) и (2) (записанными для ионов), чтобы изучить ионные затухания Ландау (или нарастание), при наличии электронного фона. Эта модель была усовершенствована Армстронгом и Молтгомери [15], и она рассматривает электроны как жидкость с нулевой массой, которая описывается адиабатическим уравнением состояния

В результате возникает следующая связь между  $\phi$  и  $n_e$ :

$$\frac{T_i}{T_e} \phi(x, t) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} [n_e(x, t)]^{\gamma - 1}, \quad (59)$$

где  $T_i$  — температура ионов,  $T_e$  — температура электронов,  $\gamma$  — показатель степени ( $\gamma \neq 1$ ) в формуле  $P_e = P_0 (V_0/V)^\gamma$ . Здесь использованы естественные ионные единицы:  $\phi \equiv 0$ , когда плотность однородна,  $n(x, t) = 1$ . Теперь нужно подставить функцию  $n_e(x, t)$  или ее компоненты Фурье в уравнение Пуассона (см. (2)), которое связывает электроны и ионы. Правую часть уравнения (59) можно разложить в ряд по степеням отклонения плотности от однородного распределения и оставить только линейный член. Вслед обозначим:  $\delta n_e(x, t) = n_e(x, t) - 1$ , тогда

$$\delta n_e(x, t) = \frac{T_i}{T_e} \phi(x, t), \quad (60)$$

где  $\delta n_e$  не содержит пространственно-однородной части и, следовательно, не имеет компоненты Фурье с  $n = 0$ . При  $\gamma = 2$  выражение (60) является точным; при  $\gamma = 1$  выражение (60) все еще применимо, хотя формула (59) неприменима. Отметим, что плотность  $n_e(x, t)$  получена без какого-либо численного интегрирования уравнения движения электронов.

Переходя теперь формулы (30) и (31) для ионов при наличии электронов, получаем вместо формулы (31) следующий выражение:

$$E_n(t) = \frac{-i(2n)^{1/2} Z_{0n}(t)}{nk_0 + \frac{T_e}{\gamma^2 c^2 n k_0}}, \quad n \neq 0. \quad (61)$$

Отсюда видно, что ионная волна ведет себя подобно электронной волне, если  $T_e$  или  $nk_0$  велико, и очень сильно отличается от последней, если  $nk_0$  мало. Остающаяся часть процедуры вычисления аналогична той, которая применяется для электронной волны, за исключением того, что формула (61) заменяет формулу (31). Уже предварительные результаты показывают, что в области  $T_i = T_e$  в этой модели nonlinearное развитие устойчивых ионных волн качественно подобно поведению электронных волн. В описанной модели не получены некоторые существенные эффекты динамики электронов, например электронное затухание Ландау, поэтому остается определить, насколько далеко можно продвинуть эту модель.

### § 5. Выводы и возможные будущие направления

Цель этой главы — дать обзор существующих методов численного решения уравнения Власова. Изложенные расчеты были ограничены одномерным и пространственно-периодическим случаем,

<sup>1)</sup> H. Dueset, частное сообщение, 1967.

так что это только начало и еще многое предстоит сделать. Сейчас попытаемся сформулировать в рамках качественной физической картины то, что, по нашему мнению, достигнуто численными методами. Мы также выдвигем несколько предложений и соображений по дальнейшей работе.

Большая часть наиболее опасных трудностей, встречающихся при решении уравнений Власова приближенными аналитическими методами, связана, как отмечалось в § 1, п. 1, с нашей неспособностью вычислить траектории частиц в той части пространств скоростей, которая лежит вблизи фазовых скоростей волны. (Тальную часть фазовой плоскости можно последовательно рассмотреть с помощью теории возмущений.) В описанных численных схемах ЭВМ во время вычислений в этой области фазового пространства встречается не больше трудностей, чем в любой другой области. Можно утверждать, что большинство типично нелинейных эффектов, которые возникали до сих пор в численных расчетах тесно связано с этой областью сильного взаимодействия между частицами и волнами. Теперь можно утверждать, что имеющееся качественное понимание везикулярной захватами Ландау эволюции двухпоточковой неустойчивости (при наличии ограниченного числа неустойчивых волн) и явления эхо. Кажется, что остается немного других качественно новых одномерных явлений (за важным исключением полностью развитой турбулентности, включающей много неустойчивых мод), которые можно открыть. По нашему мнению, параметрический резонанс (например, [57]) не очень интересен для исследований с помощью ЭВМ в одномерной плазме, описываемой уравнением Власова.

Потребуется новые идеи для расмотрения одномерных явлений, в которых снято требование пространственной периодичности, все описанные до сих пор решения критически зависят от предположения о периодичности в пространстве. Имеется ряд нерешенных задач, которые ждут решения. Укажем некоторые из них: эволюция ударных волн, дилатанса образования переходного слоя, везикулярной отдачи бесстолкновительной плазмы на периодический сигнал, возбуждаемый в какой-то точке пространственной эволюция тангенциальных разрывов.

Очевидно, что некоторые изложенные методы можно неглубоко обобщить для последования большого числа задач в двумерной бесстолкновительной плазме, которая периодична в пространстве. При этом число независимых переменных увеличивается с трех до четырех или пяти п, следовательно, существенно увеличивается требуемое машинное время. Поскольку более сложные расчеты для одномерных задач по-прежнему занимают почти неизменяемое машинное время (по состоянию на 1969 г.), то предложение относится скорее к будущему, по тем не менее движение в этом направлении неизбежно, поскольку, с одной стороны

ЭВМ становятся все более быстродействующими и более совершенными, а с другой стороны, — не существует других известных методов получения точной информации о поведении двумерной нелинейной бесстолкновительной плазмы, в которой эффекты индивидуальной частиц несущественны.

Легко видеть, что система уравнений Власова — Пуассона в двумерном случае может быть решена с помощью представления Фурье — Эрмита, описанного в § 2; не вызывает трудностей и исключение *магнитных полей* и *поперечных электрических полей*; уравнения, которые определяют эволюцию матричных элементов функции распределения, снова оказываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка по времени. Будет три или четыре индекса вместо двух, но методы вычисления, несомненно, будут качественно теми же.

Весьма вероятно, что можно также успешно применять методы двойного преобразования Фурье. Однако нужна известная осторожность, поскольку даже в одномерном случае приходится, тем не менее, решать дифференциальные уравнения в частных производных.

Можно ожидать, что в двумерном случае интересные фазовые эффекты возникнут в отсутствие магнитного поля, поскольку при этой геометрии увеличивается вероятность того, что частицы увидят компоненты электрических полей, которые практически не зависят от времени в их собственных системах координат, и потому будут сильно взаимодействовать с ними. Условие такого сильного взаимодействия для двумерного (или трехмерного) случая записывается в виде

$$\omega \approx kv,$$

которое, очевидно, гораздо менее жесткое, чем условие для одномерного случая:

$$\omega \approx kv.$$

В частности, заманчива перспектива ускорения частиц до скоростей, гораздо больших, чем наибольшая фазовая скорость  $(\omega/k)_{\text{макс}}$ .

Исключение в рассмотрении магнитных полей, что в принципе расширяет область охватываемых качественно новых физических явлений, приводит к циклотронным резонансам частиц с модами, чьи частоты приближенно образуют рациональные отношения с гирочастотами  $(m\omega_{\text{иоля}} + n\omega_{\text{иоля}}) \approx 0$ , где  $m$  и  $n$  — целые числа). Продолжный электростатический резонанс, описанный в этой главе, конечно, также будет иметь место, как, несомненно, и некоторые резонансы гибридного типа, включающие одновременно оба эффекта. Детали требуют дальнейших исследований.

В заключение можно довольно уверенно сказать, что с помощью методов преобразований для решения уравнений Власова можно получить важную информацию о нелинейном поведении плазмы весьма ясным способом. Можно также довольно определенно утверждать, что мы находимся вблизи начала, а не конца этих исследований.

*Благодарности.* Мы благодарим профессоров Б. Хаббарда, Р. Кейли и Д. Фирла за полезные дискуссии во время этих исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Montgomery D., Tidman D. A., *Plasma Kinetic Theory*, New York, 1964.
2. Landau L. D., *ЖЭТФ*, **16**, 574 (1946).
3. Sauer A. W., *Journ. Math. Phys.*, **6**, 859 (1965).
4. Nielsen C. E., *Seiler A. M., Symon K. B.*, Proc. Intern. Conf. on High Energy Accelerators (Sept. 14—19, 1959, Geneva). CERN, Geneva, 1960, p. 239.
5. DePach D. C., *Journ. Electron Control*, **10**, 439 (1962).
6. Berk H. L., Roberts K. V., *Phys. Fluids*, **10**, 4395 (1967).
7. Berk H. L., Roberts K. V., *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 207 (1967).
8. Knorr G., *Zs. Naturforsch.*, **16a**, 4320 (1961).
9. Kellogg P. J., *Phys. Fluids*, **8**, 402 (1965).
10. Knorr G., Rept. MPI/PA-42/63, Rept. of the Max Planck Inst. für Physik und Astrophysik, Munich, 1965.
11. Knorr G., *Zs. Naturforsch.*, **18a**, 1304 (1963).
12. Armstrong T. P., Univ. of Iowa Res. Rept. No. 66—34. Ph. D. Thesis, Univ. of Iowa, Iowa City, 1966.
13. Armstrong T. P., *Phys. Fluids*, **10**, 1269 (1967).
14. Armstrong T. P., Montgomery D. C., *Journ. Plasma Phys.*, **1**, 425 (1966).
15. Armstrong T. P., Montgomery D. C., Proc. APS Topical Conf. on Numerical Simulation of Plasma (Sept. 18—20, 1963), Los Alamos Sci. Lab. Rept. No. LA-3990, Los Alamos, New Mexico, 1963.
16. Armstrong T. P., Montgomery D. C., Univ. of Iowa Res. Rept. No. 69—1969; *Phys. Fluids*, **12**, 2094 (1969).
17. Harding R. C., *Phys. Fluids*, **11**, 2233 (1968).
18. Harding R. C., Ph. D. Thesis, Univ. of Iowa, Iowa City, Iowa, 1968.
19. Grant F. C., Feix M. R., *Phys. Fluids*, **10**, 696 (1967).
20. Grant F. C., Feix M. R., *Phys. Fluids*, **10**, 1356 (1967).
21. Sakasaki H. L., NASA Publ. SP-153, Clearinghouse for Federal Scientific Information, Springfield, Va., 1967.
22. Titchmarsh E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, London: New York, 1937, Ch. 1, § 4.27, p. 44. (См. перевод: *Титчмарш Е.*, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1958.)
23. Gould R. W., O'Neil T. M., Melnberg J. H., *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 103 (1967).
24. O'Neil T. M., Gould R. W., *Phys. Fluids*, **11**, 434 (1968).
25. Backus G., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 478 (1960).
26. Weitzner H., *Phys. Fluids*, **6**, 4123 (1965).
27. Weitzner H., *Phys. Fluids*, **7**, 476 (1964).
28. Cromér H., *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton, N.J., 1966, Ch. 20.
29. Backus A., Buzaroe E., Casavec P., *Nucl. Fusion Suppl.*, Pt. 2, 465 (1966).
30. Drummond W. E., Pines D., *Ann. Phys.*, **28**, 478 (1964).
31. Bernstein J. B., *Fingelmann F.*, *Fluids*, **9**, 937 (1966).
32. Weissglas J., *Plasma Phys. (Journ. Nucl. Energy Pt. C)* **4**, 329 (1962).
33. Engelmann F., Feix M., Minardi E., Ozenne J., *Phys. Fluids*, **6**, 266 (1963).
34. Crowfield F. R., Broadbent T., *Bull. Am. Phys. Soc. Ser. 11*, **12**, 1515 (1968).
35. Montgomery D. C., Gorman D., *Phys. Fluids*, **5**, 967 (1962).
36. Cortenans S., *Phys. Fluids*, **6**, 454 (1963).
37. Gill S., Proc. Cambridge Phil. Soc., **47**, 96 (1954).
38. Leavers W. M., *Phys. Fluids*, **10**, 2708 (1967).
39. Leonard A., Bernstein I. B., *Phys. Rev.*, **142**, 1456 (1963).
40. Taylor E. C., Comisar G. G., *Phys. Rev.*, **132**, 2379 (1963).
41. Chandrasekhar S., *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 1 (1943).
42. Dennis J., Doyle B. W., Hirsch R. H., *Phys. Fluids*, **28**, 2344 (1968).
43. Gory S. P., *Phys. Fluids*, **10**, 570 (1967).
44. Lomez R. J., NASA Publ. SP-153, Clearinghouse for Federal Scientific Information, Springfield, Va., 1967.
45. Hinton F. L., Oberman C., *Phys. Fluids*, **11**, 1982 (1968).
46. O'Neil T. M., *Phys. Fluids*, **11**, 2420 (1968).
47. Drummond W. E., *Pines D.*, *Nucl. Fusion Suppl.*, Pt. 3, 1059 (1962).
48. Barker J. F., Hirschfeld J. L., Proc. Conf. Phys. Quiescent Plasmas (Jan. 10—13, 1967, Frascati), Vol. II, Rome, 1967, p. 475.
49. Bernstein J. B., Greene J. M., Kruskal M. D., *Phys. Rev.*, **408**, 546 (1957).
50. Horie E. G., *Bull. Am. Phys. Soc.*, **2**, 67 (1957).
51. Montgomery D. C., *Phys. Fluids*, **3**, 274 (1960).
52. Low F. E., *Phys. Fluids*, **4**, 842 (1961).
53. Pegelsstein L. D., *Phys. Fluids*, **7**, 1464 (1964).
54. Iradberg J. P., *Phys. Fluids*, **8**, 1031 (1965).
55. Knorr G., *Phys. Fluids*, **11**, 885 (1968).
56. Jackson E. A., Raether M., *Phys. Fluids*, **9**, 1257 (1966).
57. Dubois D. F., *Statistical Physics of Charged Particle Systems*, Proc. Summer School on Statistical Physics of Charged Particle Systems (Kyoto, Japan), eds. R. Kubo and T. Kihara, Tokyo—New York, 1969.

5. Gentry R. A., Harlow F. H., Martin R. E., Meth. Comput. Phys., 4, 211
6. Hockney R. W., Journ. Assoc. Comput. Mach., 12, 95 (1965).
7. Cooley J. W., Tukey J. W., Math. Comput., 19, 297 (1965).
8. Gentleman W. M., Sende G., Fast Fourier transforms — for lunch and 1966 Fall Joint Computer Conf. AFIPS Proc. (Spartan, Washington, 29, p. 563 (1966).
9. Cochran W. T., Cooley J. W., Favre D. L., Holias H. D., Kaenel Lang W. W., Matting G. C., Nelson D. E., Rader C. M., Welch P. D., Trans. AU-13, 45 (1967).
10. Hunge C., Zs. Math. Phys., 48, 443 (1903).
11. Hockney R. W., Tech. SUIPR Rep. No. 53. Inst. for Plasma Res., Feinl Univ., Stanford, Calif., 1966.
12. Cooley J. W., Lewis P. A. W., Welch P. D., The fast Fourier transform algorithm and its applications, IBM Res. Rept. RC 1743, Feb. 7, 1966.
13. Buneman O., Формы-программы, которые были разработаны на AFIPS Topical Conf. Numerical Simulation of Plasma (Los Alamos, N.M., см. также SUIPR Rep. No. 294. Inst. for Plasma Res., Stanford Univ., Stanford, Cal., 1969).
14. Busbee B. L., Golub G. H., Neilson C. W., Tech. Rept. CS 128. Cal. Science Dept., Stanford Univ., Stanford, Cal., 1969.
15. Boris J., Roberts K. V., The optimization of particle calculation and 3 dimensions, Journ. Comput. Phys., 3, 552 (1969).
16. Veronis G., Deep-Sea Res., 13, 31 (1966).
17. Byrdson C. K., Fuss R., Journ. Comput. Phys., 3, 494 (1969).
18. Бисоп В., Формы-Программы, Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1963.
19. Hockney R. W., Journ. Appl. Phys., 39, 4166 (1968).
20. Hohl F., NASA Tech. Note D-6446, 1968.
21. Hohl F., Bull. Astronom. Serie 3, 3, Facsimile 2, 227 (1968).
22. Varga R. S., Matrix Iterative Analysis, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
23. Fromm J. E., Meth. Comput. Phys., 3, 354 (1964).
24. Chorin A. J., Math. Comput., 22, 745 (1968).
25. Miller R. H., Prendergast K. H., Astrophys. Journ., 151, 699 (1968).
26. Hohl F., Hockney R. W., Journ. Comput. Phys., 4, 306 (1969).
27. Byers J. A., Phys. Fluids, 9, 1638 (1966).
28. Wadwa R. P., Buneman O., Brauch D. F., AIAA Journ., 3, 1077 (1965).
29. Yu S. P., Kuznetsov C. P., Eberman O., Journ. Appl. Phys., 36, 2550 (1965).
30. Levy R. H., Hockney R. W., Phys. Fluids, 11, 766 (1968).
31. Hockney R. W., Publ. Astron. Soc. Pacific, 80, 662 (1968).
32. Hockney R. W., Hohl F., Effects of velocity dispersion on the edge of a disk of stars, Astron. Journ., 74, 1102 (1969).
33. Шарипов В. Д., Письма в ЖЭТФ, 2, 40 (1965).
34. Starrock P. A., Phys. Rev., 141, 186 (1966).
35. Pury S., Phys. Fluids, 9, 1043 (1966).
36. Hockney R. W., Phys. Fluids, 11, 1381 (1968).
37. Birdsall C. K., Langdon A. B., McKee C. F., Okuda M., Wang D., AFPS Topical Conf. Numerical Simulation of Plasma (Los Alamos Lab., Los Alamos, N.M.), Publ. LA-3590, 1968, p. D2-4.
38. Killeen J., Tompsett L., Journ. Comput. Phys., 1, 29 (1966).
39. Hockney R. W., Tech. SUIPR Rept. No. 202. Inst. for Plasma Res., Stanford Univ., Stanford, California, 1967.
40. Hirsch R. L., Journ. Appl. Phys., 38, 4522 (1967).
41. James G. S., Levy R. H., Bethe H. A., Feld R. T., Phys. Rev., 145, 92 (1966).
42. Abernathy F., Kromauer R., Journ. Fluid Mech., 13, 1 (1962).
43. Hohl F., Symp. Computer Simulation of Plasmas and Many-Body Systems NASA Special Publ. SP-153, 1967, p. 323.
44. Toomre A., Astrophys. Journ., 139, 4217 (1964).

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ПЛАЗМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКЕ

P. Мора\*

### § 1. Введение

Метод частиц в ячейке (PIC-метод) был первоначально развит Фрэнком Харлоу и его сотрудниками в Лос-Аламосе в 1955 г. для моделирования многомерной сжимаемой жидкости и обсуждается в третьем томе настоящей серии. Идея PIC-метода заключается в том, что можно преодолеть численные неустойчивости и диффузию массы метода Эйлера и трудности искания ячеек метода Лагранжа в результате объединения лучших черт этих методов. Метод использует регулярные ячейки Эйлера для вычисления макроскопических переменных, например давления и скорости жидкости, тогда как вещество переносится из ячейки в ячейку лагранжевским образом, в виде отдельных модельных частиц. Такие модельные частицы, которых обычно десять или больше в каждой ячейке, представляют определенное количество массы и сохраняют свою индивидуальность на протяжении всего процесса вычисления. На каждом временном шаге в соответствии с законами сохранения подается энергия и импульс, а затем вычисляется энергия вместе с непосредственно вычисляемой плотностью массы в уравнении состояния вещества определяют распределение давления, которое затем используется для определения ускорения жидкости и новых скоростей в ячейке. Эти новые скорости в ячейках интерполируются на координаты частиц и используются для перенесения этих частиц по ячейкам сетки и т. д. Уравнение состояния вещества устанавливается совершенно независимо от остального кода. В частности, при рассмотрении очень простой и удобной проблемы аксимально-симметричной плазменной пушки давление единственной компоненты магнитного поля  $B_0$  удовлетворяет требованию скалярности без специальных видоизменений.

В данной главе мы кратко обсудим два применения гидродинамического PIC-метода к проблемам такой плазменной пушки, а затем изложим PIC-метод, который используется при моделировании бестолкновительной плазмы. Следует иметь в виду следующие различия между двумя областями применения. Скорость

\* R. J. Morse, University of California, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico.

классической жидкости — однозначная функция координат следовательно, характеристика ячейки в гидродинамическом методе. С другой стороны, в бесстолкновительной плазме в каждой точке пространства существует некое распределение скоростей частиц и нужно детально рассматривать эту микроструктуру, чтобы получить важные физические результаты. Соответствующая скорость становится характеристикой частицы, а модельная скорость представляет некоторое число реальных частиц с теми же самыми электрическим зарядом, массой, координатами и скоростью. Характеристиками ячейки в этом случае являются электрические поля, суммарные плотности частиц и возникающие макроскопическое давление, которое используется в гидродинамическом РИС-методе, можно в принципе определить по распределению скоростей в каждой ячейке в бесстолкновительном методе, но обычно оно не вычисляется.

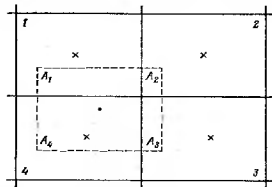
### § 2. Гидродинамический РИС-метод для моделирования аксиально-симметричных плазменных пушек

Поскольку двумерное аксиально-симметричное течение в цилиндрических координатах  $r$  и  $z$ , то используется обычная прямоугольными ячейками в этих координатах, а про вычисления отличается от случая декартовых координат поправками к разностным уравнениям.

Благодаря большим плотностям и низким температурам ионы влетают в плазменные пушки, и из-за дополнительной связи, связанных с малостью ларморовского радиуса заряженных частиц, часто можно рассматривать плазму в ионной как вязкую жидкость. Для интересующих нас параметров, во время процесса, можно пренебречь классической столкновительной диффузией магнитного поля в плазме. Всегда существует возможность появления какого-то аномального сопротивления сравнение с экспериментом говорит о том, что при моделировании предположение о нулевом сопротивлении вполне справедливо. Кроме того, когда имеется магнитный поток, замороженный в поток, отношение потока к массе модельной частицы постоянно, а уравнение состояния связывает возникающее давление с уравнением состояния вещества, которое имеет форму адиабатического закона с  $\gamma = 5/3$ .

Подробное изложение гидродинамического РИС-метода можно найти у Харлоу в третьем томе настоящей серии книг [1]. Однако один вопрос полезен будет обсудить здесь, а именно, в частности, он существует в бесстолкновительном методе. Многим читателям известно, конечно, что РИС-код имеет некоторое сглаживание, но они не представляют себе

или степени. Это сглаживание появляется в результате интерполяции, и в гидродинамическом РИС-методе оно выполняется следующим образом. Допустим, что модельная частица находится в определенной точке ячейки с номером 4 (фиг. 1), так что четыре из ближайших к частице центров ячеек, обозначенных крестиками, имеют номера от 1 до 3. В результате предыдущих вычислений были определены скорости потока в каждом из этих центров ячеек; теперь для продвижения частицы нужно определить ее скорость. Из очевидных физических соображений скорость частицы должна



Фиг. 1. Техника сглаживания в РИС-методе.

быть гладкой, непрерывной функцией координат. Удобным, быстрым вычисляемым и наиболее часто используемым является следующее определение скорости частицы:

$$V_p = \frac{A_1 V_1 + A_2 V_2 + A_3 V_3 + A_4 V_4}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}, \quad (1)$$

где  $V_i$  — скорости в центрах ячеек,  $A_i$  — соответствующие площади перекрывающихся ячеек (фиг. 1) с дополнительной ячейкой (обозначена пунктиром), центр которой совпадает с центром частицы ( $i = 1, 2, \dots$ ). Нетрудно заметить, что эта процедура усреднения по площади является билинейной интерполяцией и легко обобщается на одномерный или трехмерный случай путем использования соответственно двух или восьми центров ближайших ячеек. Иногда, особенно при рассмотрении сверхзвукового течения, также приходится усреднять по площади выкладки частиц в характеристиках ячейки. При ограниченном числе модельных частиц на ячейку одна частица, пересекая границу ячейки, может вызвать значительный скачок давления на границе, что заставит частицу, если она движется медленно, двигаться обратно через границу; таким образом, возникают ложные колебания. Указанное усреднение



характеристики частицы по площади производятся с некоторыми предположениями, что выклад от частицы в такие характеристики ячейки, как плотность, в ближайших к частице центрах пропорционален коэффициентам  $A$ .

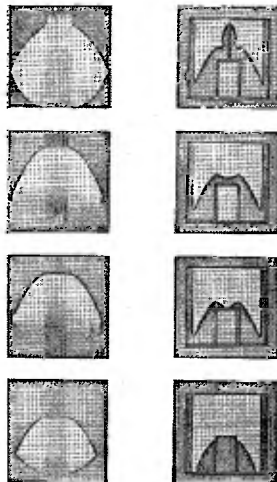
### 1. Плазменный фокус

Аксиально-симметричные плазменные дужки обычно работают в двух различных режимах. При одном режиме (фиг. 2) область внутри и вокруг дужки целиком заполнена неподвижным газом, обычно дейтерием. Электрический разряд начинается позади диэлектрического электрода и создает дугу из нагретого газа, которую магнитным поршнем, как сжатостателем, выдавливается и закручивается вокруг конца электрода и образует на оси с малой интенсивности, называемый плазменным фокусом. Дальнейшее описание системы и ссылки можно найти в гл. 9, а также в работе Ватлера и др. [2]. На фиг. 2 сопоставляется ряд последовательных во времени гидродинамических РИС-распределений с соответствующими экспериментальными фотографиями режима работы дужки [2]. Обычный внешний цилиндрический электрод исключается как при моделировании, так и в эксперименте, поскольку было выяснено, что в этом режиме фокусальный электрод только затрудняет диагностику и мало влияет на режим работы.

В этих численных экспериментах плазма и магнитное поле перемешиваются. Магнитное поле  $B_0$  задает вакуумную область внутри дужки и создает постоянное давление (на свободной границе). Остальное сводится к чисто гидродинамическому вычислению. Однородная область вне дужки холода. Очень резкая внешняя поверхность дужки представляет ударную волну, которая сильнее при меньших радиусах; она движется быстрее. Слой между ударной волной и внутренней свободной границей состоит из нагретой ударной волной плазмы, которая обеспечивает засветку экспериментальных фотографий. Как было указано выше, РИС-метод очень хорошо подходит для описания таких взаимосвязанных поверхностей, как эта свободная граница (см. далее работу [1] и приведенную там библиографию). В частности, он устраняет трудности с условием Куранта, возникающие, когда рассматривается непрерывный переход от конечной к бесконечной скорости звука поперек этой границы. Дальнейшее рассмотрение этой проблемы читатель найдет в гл. 9.

Эти РИС-вычисления являются первым полным двумерным моделированием течения вещества в плазменном фокусе и, как видно из фиг. 2, они дают адекватный количественный расчет этой системы, включая вторичный пузырь, который появляется сразу у вершины самого фокуса [3]. Этот метод можно было бы обо-

чтобы включить другие физические эффекты в ударном слое, которые зависят от плотности и температуры, поскольку последние



Фиг. 2. Последовательность во времени стадии плазменного фокуса.

известны на каждом временном шаге. Однако из-за двух причин этот метод терпит неудачу вблизи оси, где возникает высокотемпературный фокус.

Первая заключается в том, что сетка, которая подходит для рассмотрения всего плазменного потока, слишком крупная,

чтобы разрешить фокус. Тонкий ствол (фиг. 2), выпущенный из пушки находится полностью внутри первого ряда ячеек. Данную пушку можно устроить путем использования более мелкой решетки в этой области, как сделано Робертсом и ниже при МГД-расчете проблем слоисто-непрерывного течения. Вторая проблема обусловлена тем, что температуры и градиенты магнитного поля в фокусе, получаемые из наших гидродинамических моделей, кажется, не полностью согласуются с гидродинамическими моделями, основанными на малости свободного пробега или малости морозовского радиуса. В то же время необходимые бестолковые методы, например бесстационарный РИС-метод, описанный ниже, недостаточно развиты, и нет достаточно быстрой и действенной ЭВМ, чтобы рассмотреть проблемы в этой физической сложности, как проблема фокуса, хотя продвижение в этом направлении происходит.

## 2. Режим непрерывного течения для коаксиальной пушки

При втором режиме работы в плазменной пушке и в дрейфовом пространстве, куда она стреляет, вначале создается вакуум, тем быстрый клапан выпускает порцию газа аксиально-симметрично относительно внутреннего электрода в точке примерно посередине между задней стороной и вершиной. (В этом режиме работы во внешней коаксиальной цилиндрической электрод для ограничения расширения газа.) Затем между двумя электродами создается разность потенциалов, и разряд развивается так, что превращается в плазму со замороженным магнитным полем раньше, чем возникает значительное течение плазмы. Это в эксперименте. Давление магнитного поля, которое на начальной стадии значительно превышает давление плазмы, вызывает и сжатие плазмы через солено в дрейфовое пространство. Такая пушка называется пушкой Маршала. Если, кроме области между электродами достаточно длинная, то этот замораженный плазмы может создать почти непрерывный на протяжении некоторого времени.

Гидродинамические РИС-расчеты были выполнены, чтобы проверить работу пушки и предположение Морозова [4] о том, что раннее течение могло бы дать очень большие плотности и температуры на оси в так называемых «непрерывных пиках» в результате адиабатического сжатия [5]. В этом случае гидродинамическое приближение менее обосновано, чем для плазменного течения, а начальное распределение плотности и намагниченности сильно меняются и обычно хорошо не известно. Поэтому из следующих идеализированных начальных условий. Плотность постоянна в области между коаксиальными электродами и до нуля у сола. Отношение потока поля к массе также по-

на всех потоковых трубках, т. е. для всех модельных частей. (Это предполагает, между прочим, что пока система ограничена радиально, скорость Альфвена также ограничена, что весьма полезно.) Последнее условие было наведено Морозовым [4] в соответствии с предположением об однородности начальной плотности требует, чтобы начальное поле  $B_0$  совпадало с вакуумным полем  $B_0 \sim 1/r$ , что согласуется с экспериментальным методом создания плазмы. На фиг. 3 показано, как изменяется во времени распределение частиц, определяемое этими начальными условиями. Распределение является ввиду равномерным, за исключением поверхности вакуума — плазма у сола пушки. Основные уравнения движения (до перехода к равновесию) имеют вид

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( p + \frac{E_0^2}{8\pi} \right) - \frac{E_0^2}{4\pi r}, \quad (2a)$$

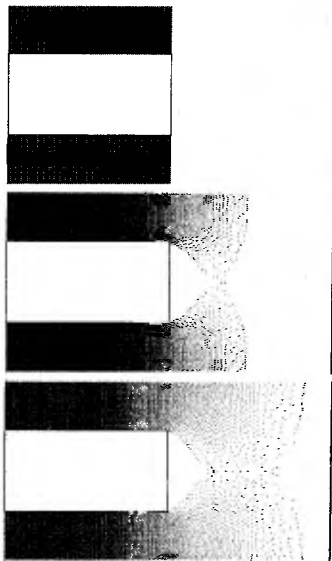
$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( p + \frac{E_0^2}{8\pi} \right), \quad (2b)$$

$$\rho \frac{dI}{dt} = -\frac{r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) - p \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2в)$$

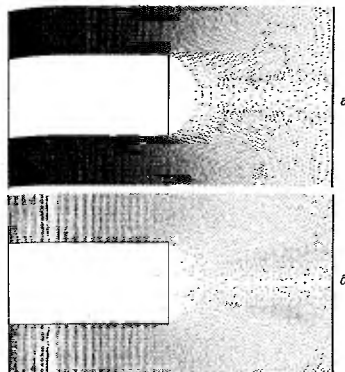
где  $\rho$ ,  $p$  и  $I$  — соответственно плотность плазмы, давление и удельная внутренняя энергия, а  $u$  и  $v$  — скорости вдоль  $r$ - и  $z$ -направлений. Последний член в уравнении (2a) представляет эффект стягивания от кривизны поля, который приводит как к неустойчивостям типа перетяжек  $z$ -плечей, так и к большим адиабатическим сжатиям, предсказанным Морозовым.

Сначала плазма по всей вакуумной поверхности расширяется в дрейфовое пространство, в то время как волна разрежения бежит назад, к пушке, а затем, частично из-за эффекта стягивания (фиг. 3), поток начинает поворачивать к оси. Вплоть до момента, когда поток впервые достигнет оси, плазма остается холодной, имея только кинетическую энергию направленного течения, полученную от расширения захваченного поля  $B_0$ . Когда сходящийся поток достигает оси, он должен создать ударную волну, которая превращает часть энергии направленного движения во внутреннюю энергию плазмы.

Вычислительная сетка содержит достаточное количество холодной, замораженной плазмы, чтобы допустить развитие квазипериодического течения в области сола. Последний кадр на фиг. 3, который сделан чуть позднее, чем первые четыре, показывает эту более позднюю во времени структуру. Характерной чертой течения является существование стоячей ударной волны в форме тонкого конуса с вершиной на оси на расстоянии одного радиуса внутреннего электрода перед солом и образующими, направленными вниз во тчение и парую пушки.



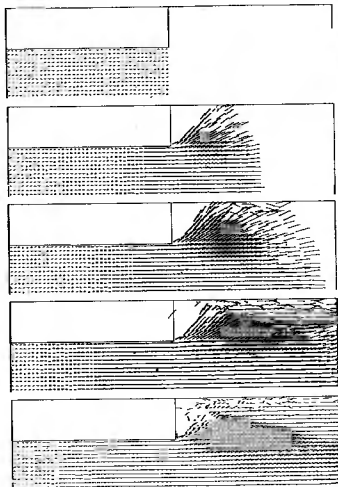
Фиг. 3. Последовательные по времени стадии непрерывного течения



На фиг. 4 представлен ряд графиков распределения скоростей в потоке, которые соответствуют по времени графикам частиц на фиг. 3 и ясно демонстрируют отклонение потока при прохождении через эту ударную волну, которая по существу аналогична ударной волне, возникающей позади снаряда с прямоугольным носом в сверхзвуковом потоке. Вблизи электрода имеется почти вакуумная область, которая ограничена свободной поверхностью во внутренней стороне потока, простирающейся от угла внутреннего электрода к вершине ударной волны. Сама ударная волна, наиболее сильная вблизи вершины, постепенно ослабевает при удалении от носика; в результате удельная внутренняя энергия (или температура  $T$ , см. фиг. 5) больше вблизи оси, где пересекаются линии тока, проходящие через области с наибольшей сжатием.

Фронт ударной волны на фиг. 5 был нанесен от руки на основании последнего на фиг. 3 распределения плотности частиц. Показанные два профиля температуры  $T$  были построены по табл. 1; внутренняя пунктирная линия показывает существование двух структур в области ударной волны, которые проявляются как

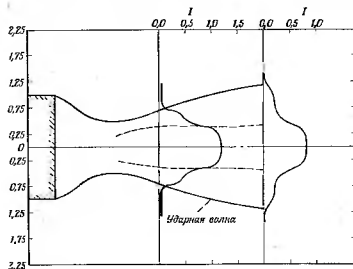
ступеньки на графиках Г. Центральная часть определенно горячее наружная. В горячей центральной области ударной



Фиг. 4. Распределения скоростей в потоке, соответствующие

имеется падение плотности, которое видно из распределения. Однако нужно проявлять некоторую осторожность при интерпретации распределения частиц вблизи оси, полученного из цилиндрического PIC-моделирования, поскольку центральная фактически представляет собой кольцо с центром на ос

постоянную часть полной массы, а не массы на единицу длины; таким образом, однородной плотности будет соответствовать такая плотность модельных частиц, которая растет линейно по радиусу от нуля на оси. Следовательно, хотя в горячей внутренней области ударной волны действительно имеется падение плотности, некоторая часть наблюдаемого падения обусловлена этим



Фиг. 5. Фронт ударной волны, показанный на фиг. 3, с профилями температуры  $T$ .

геометрическим эффектом. В некоторых гидродинамических моделях освобождаются от этого затруднения, приписывая меньшие массы частицам, которые в начальной стадии находятся вблизи оси.

Физические выводы из этих расчетов суть следующие. В случае тупого внутреннего электрода большие сжатия, предсказанные Морозовым, невозможны из-за возрастания энтропии благодаря сопутствующей ударной волне, а рассчитанный пример потока, включая сопутствующую волну, дает качественно правильное описание подобных структур (они наблюдались экспериментально в пламенных пушках Маршаллом<sup>2)</sup> и Маварди<sup>3)</sup>). Здесь уместно сделать несколько общих замечаний, прежде чем перейти к изложению бесстолкновительного PIC-метода.

<sup>2)</sup> J. Marshall, частное сообщение, 1968.

<sup>3)</sup> O. Mawardi, частное сообщение, 1969.

На последнем графике плотности частиц (фиг. 3) внутри счетчик может видеть радиальные страты плотности. Это явление нефизических колебаний (обсужденных выше), которое возникает из-за отсутствия усреднения по площади характерных частиц, а равно и характеристик ячеек при выбранном способе моделирования пушки и которые можно было бы устранить использованием такого усреднения. Однако в нашем случае важно, что эти скорости существенно не влияют на интересующие нас части штока. При расчетах плазменного фокуса, в которых усреднялись по площади только характеристики ячейки, эти страты не возникали. Это, возможно, связано с тем обстоятельством, что скорость потока всюду равна нулю или очень велика относительно к сетке.

При заданном временном шаге и размере ячейки Эйлера и лагранжевы коды работают обычно заметно быстрее, РИС-коды, и потому более привлекательны, когда машинное время ограничено. Однако РИС-коды имеют свои преимущества, которые компенсируют этот недостаток. Наряду с тем, что они свободны от эйлеровой диффузии и лагранжева искажения ячеек, обычно довольно устойчивы и требуют меньше специальных наладок при переходе от одной проблемы к другой. Использование размера ячейки как меры разрешения приводит к нескольким несимметричным выводам, поскольку в некоторых отношениях распределение частиц внутри ячейки может дать лучшее разрешение. Наконец, обычное распределение положений модельных частиц дает хорошее наглядное описание плотности жидкости плазмы, в то время как для кодов, прямо вычисляющих плотностное построение таких распределений с помощью дополнительных программ затруднительно.

### § 3. Бесстолкновительный РИС-метод

В соответствии с бесстолкновительным приближением для описания полностью ионизированной, высокотемпературной плазмы зарядя распределения по скоростям и координатам каждого сорта заряженных частиц  $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  удовлетворяет бесстолкновительному уравнению Больцмана с силой Лоренца

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_s}{m_s} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

где поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  определяются уравнениями Максвелла, в которых заряд  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{J}$  выражаются через суммы моментов функций распределения:

$$\rho = \sum_s q_s \int d^3v f_s, \quad \mathbf{J} = \sum_s q_s \int d^3v \cdot \mathbf{v} f_s.$$

На практике делаются дальнейшие приближения для упрощения вычислений или для выделения отдельных эффектов. Целью бесстолкновительных РИС-расчетов является получение решений этой системы. Поскольку такое описание плазмы, при котором пренебрегается столкновениями, корреляциями и т. п., соответствует несжимаемому течению жидкости с плотностью  $f$  в фазовом пространстве  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , то может возникнуть вопрос: зачем вообще использовать вычислительную модель с частицами? Почему бы не воспользоваться какой-либо подходящей гидродинамической моделью для вычисления потока  $f$  в фазовом пространстве? Действительно, Арастронг и др. (см. гл. 2), используя преобразованный метод Эйлера, а также Барк и Робертс (см. гл. 3), используя метод Лагранжа (называемый моделью «единого мешка»), добились успеха при рассмотрении проблем, которые благодаря симметрии сводятся к одномерному случаю в координатном пространстве, т. е. к двумерному случаю в фазовом пространстве  $(x, v_x)$ , а Киллип и Рамплин [8] путем героических усилий изучили некоторые аспекты поведения плазмы в «Астроне» с помощью прямого метода Эйлера в фазовом пространстве  $(r, z, v_r, v_\theta, v_z)$ .

Однако использование метода Эйлера или Лагранжа с сеткой, налагающей все фазовое пространство, сталкивается с двумя существенными ограничениями. Во-первых, для многих важных проблем необходимо число измерений фазового пространства оказывается больше двух и достигает шести. Оценка размеров памяти и машинного времени, требуемых соответствующими сетками, приводит к выводу о том, что если нельзя найти лучший путь, то многие, если не большинство таких проблем просто нельзя рассчитать. Во-вторых, накопленный за последние несколько лет опыт в моделировании плазмы показал, что нелинейное развитие неустойчивостей плазмы обычно сопровождается появлением в фазовом пространстве многих течений с неоднородной скоростью, иногда вихревого типа, которые требуют перераспределения зон для лагранжевых сеток и малого размера ячеек или сглаживания для эйлеровых сеток. Таким образом, с ростом времени все большее число точек требуется, чтобы определить границы зон по методу Барка и Робертса (см. гл. 3) и все большее число элементов матрицы преобразования требуется в методе Арастронга и др. (см. гл. 2).

В бесстолкновительном РИС-методе модельные частицы имеют меньшие во времени скорости и координаты, которые вычисляются и взаимодействуют, причем они движутся так, как если бы они были реальными заряженными частицами плазмы. Электрическое и магнитное поля, которые ускоряют эти частицы, вычисляются и запоминаются на регулярной пространственной эйлеровой сетке, но сетки для скоростей не существует. Почти во всех примененных каждой модельной частица эффективно представляет

большое число реальных частиц и соответственно дает вклад в численною токи и заряды ячеек. Алер, однако, предпочитает считать эти модельные частицы в ячейке не как некое собрание суперчастиц, а как представление  $f(v)$  в ячейке типа Монте-Каро. Ответ на вопрос, распределяется ли вклад частиц в заряды и по соседним ячейкам в соответствии со схемой усреднения по площади (подобно формуле (1) и фиг. 1) при получении такой аддитивной функции  $f(v)$ , зависит от применения. Заряды и  $i$  получены в виде этих ячейчных сумм, можно затем поминать интегралы по скоростям в формулах (4), вычисленные по методу Монте-Карло, который оказался особенно эффективным в случае многократных квадратур [9].

Усредняя по площади поля  $E$  и  $B$  в продвинутой модели частицы шаг за шагом во времени так, как будто они реальные, можно удовлетворить уравнению (3) в пределах ошибок округления. Затем численные решения уравнения Максвелла с определенными формулами (4), должны были бы замкнуть и дать исковые решения полной безстолкновительной системы. Но ввиду особенностей модели остается вопрос — взаимодействуют ли модельные частицы друг с другом или с сеткой каким-то образом, который дает вклад в парные столкновения, внесет недопустимо большую ошибку аппроксимации в форме диффузии и флуктуаций поля. Ответа на него, вообще говоря, нет. Большинство прогнозов в этом отношении кажется слишком пессимистичными. Понятно, что безстолкновительные эффекты в безстолкновительном PIC-методе доставят больше беспокойства в тех случаях, в которых рассматривается полное электростатическое взаимодействие, чем в моделях с полностью нейтрализованным или нейтральным зарядом.

Наиболее хорошо изучен класс проблем, в которых типичны рассматриваются и качества однородно распределенного неподвижного положительного фона, электроны представляются модельными частицами, а уравнение Пуассона решается в каждом временном шаге с плотностью заряда, которая получается в результате вычитания плотности модельных частиц из плотности из положительного однородного положительного фона. Работавший в этой области быстро обнаруживает, что усреднение по площади электронных зарядов сильно помогает делу. Усреднение проявляет себя в виде плохого сохранения энергии — в среднем полная энергия возрастает, и одну во всем причину этого легко показать. Если электростатическое поле, существующее на электрон, усреднено по площади, а вклад энергии в заряды соседних ячеек нет, то на электрон действует полная сила, т. е. он взаимодействует с сеткой (длиннейшее поле). Практически по оценкам величину остающихся столкновительных

в схеме с усреднением, начавшая малый счет с ситуации, когда электроны распределены однородно в пространстве и имеют какое-то распределение по скоростям — устойчивое, но не максвелловское. Подобные расчеты были проделаны коллегами автора в Массачусеттском технологическом институте, которые использовали также же числа частиц, размеры ячеек, временные шаги и времена счета, какие выбирались при изучении различных неустойчивостей в пространстве скоростей, и показали, что наблюдаемая термализация ничтожна. Таким образом, когда параметры выбраны так, чтобы удовлетворить и другому критерию ошибки, который обсуждается ниже, то эти условия, по-видимому, более чем достаточны, чтобы подавить диффузию в пространстве скоростей.

Было предложено несколько других многомерных методов для моделирования безстолкновительной плазмы, которые по существу подобны PIC-методу. Бердсок (см. гл. 6) предложил схему, названную «облаком в ячейке» (CIC), в которой усреднение одной частицы по площади проводится как приращение ей конечной протяженности подобно облаку. Однако в настоящее время различия между безстолкновительным PIC-методом и этими другими методами кажется большей частью умозрительными, т. е. связанными с точкой зрения различных авторов на приближения в численной модели. А фактически, по-видимому, все авторы используют почти одинаковые уравнения для проведения вычислений.

Тот же самый основной PIC-формализм использовался и в ряде других моделей безстолкновительной плазмы. Основной причиной появления различных моделей является многозначность масштабов времен и длин у равных физических явлений в безстолкновительной плазме. Наиболее важными масштабам длин являются: дебаевская длина, ларморовские радиусы электронов и ионов (которые из-за разницы в массах сильно отличаются), толщины безстолкновительных скин-слоев для электронов и ионов,  $\delta_{\text{эпр}}$  и  $\delta_{\text{ипр}}$  (которые также существенно отличаются, поскольку выражения для электронной и ионной плазменных частот,  $\omega_{\text{пр}}$  и  $\omega_{\text{ипр}}$ , содержат массы частиц), и размеры лабораторной аппаратуры. Соответственно временные масштабы вменяются от обычно очень короткого электронного плазменного периода или электронного ларморовского периода до относительно большого времени, которое требуется, чтобы обычно медленный, тяжелый ион пересек аппаратуру.

Ранее, при обсуждении проблем флуктуаций мы затронули наиболее микроскопический класс флуктуаций — неустойчивые плазменные колебания, характерные масштабы которых — дебаевская длина и электронный плазменный период. В приложениях, относящихся к контролируруемому термоядерному синтезу, невозможно проводить вычисления с этими масштабами и рассматривать весь эксперимент на протяжении экспериментального цикла. Вместо

это приходится рассматривать малую часть плазмы, используя периодические граничные условия, на протяжении характерного времени микроскопического явления, а результаты пуны и рать в транспортные коэффициенты для макроскопической или всей плазмы.

С другой стороны, существуют проблемы, которые требуют рассмотрения всей плазмы, поскольку, например, макроскопическая неустойчивость может разделять плазму на несколько больших частей. В некоторых задачах такого типа важная постоянная физика связана с ионами, которые создают постоянную анизотропию в давлении и имеют большой ларморовский радиус, тогда как микроскопическим движением электронов можно пренебречь, учитывая их только через гидродинамическое давление, которое действует на ионы через какую-то форму кваанайттерного приближения, когда дебаевская длина стремится к нулю при его приближении, когда дебаевская длина стремится к нулю.

Мы обсудим один пример первого типа, когда микроскопическая рассматривается малая часть плазмы, и один пример второго типа, моделирование всей плазмы с помощью схемы, которая подмывает некоторые наиболее микроскопические детали. В обоих случаях мы уделим несколько больше внимания полезным численным приемам, чем это обычно делается в журнальных статьях физике плазмы.

### 1. Двухпотоковая неустойчивость

В этом пункте мы сравним результаты моделирования элементарной двухпотоковой неустойчивости в без столкновительной плазме в случаях одного, двух и трех измерений. Предполагается, что ионы образуют однородный, неподвижный фон с жителям зарядом, а начальное распределение электронов пространственно однородно и представляет собой суперпозицию двух одинаковых встречных максвелловских потоков:

$$f_0(\mathbf{v}) = \frac{n_0}{\pi^{3/2} v_0^3} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}_0}{v_0} \right)^2 \right] + \exp \left[ - \left( \frac{\mathbf{v} + \mathbf{u}_0}{v_0} \right)^2 \right] \right\}.$$

Без потери общности мы приняли, что ось  $x$  направлена вдоль скорости потоков,  $\pm u_0$ . Из линейной теории известно, что при заданной тепловой скорости  $v_0$  достаточно большая начальная скорость  $u_0$  приводит к нарастанию электростатических колебаний, для которых возмущенный электростатический потенциал записывается в виде

$$\phi \sim \exp [i(kx - \omega t)],$$

и в случае неустойчивости таких колебаний наибольшие амплитуды, т. е. значения  $\text{Im} \omega$ , имеют моды с одной лишь компонентой  $k_x$ . Эти компоненты оказываются наибольшими при с-

значениях  $k$  и падают до нуля при  $k \rightarrow 0$  и при достаточно больших  $k$ .

Ввиду простоты и того обстоятельства, что наиболее быстро растущие моды можно наблюдать в одномерной ( $x, v_x$ ) проекции полной трехмерной проблемы, а также ввиду ограниченного класса физических экспериментов, для которых достаточно одномерного описания, одномерной проблеме уделялось много внимания. В частности, этому посвящены последние полные численные моделирования Аристарха (см. гл. 2), Барна и Роберта (см. гл. 3), а также Морза и Нильсона [11—13] (см. также модель плоских листов в гл. 4). Некоторые результаты этих одномерных моделей, включая устойчивую одномерную структуру, противоречат основным предположениям турбулентной теории плазмы. Обычно полагают, что эти одномерные результаты определяются симметрией из-за ограничения  $x$ -зависимостью. Таким образом, имелся повод для обобщения этой работы на случай двух и трех измерений для того, чтобы можно было ясно увидеть влияние перехода от одного случая к другому.

Чтобы прояснить это, мы выбрали трехмерную функцию распределения  $f_0(v_x, v_y, v_z)$  по формуле (5) и определенную длину периода  $L$ . Трехмерное моделирование выполнялось в кубе с ребром  $L$  при периодических граничных условиях на движение электронов и на электростатический потенциал  $\phi(x, y, z)$ , причем оно численно с пространственно однородного распределения электронов  $f_0$ . Двумерное моделирование выполнялось в квадрате  $(x, y)$  со стороной  $L$  при периодических граничных условиях и численно с распределения по скоростям  $f_0(v_x, v_y)$ , которое получается в результате интегрирования выражения (5) по  $v_z$ . Одномерное моделирование выполнялось только по  $x$  с периодом  $L$  и распределением  $f_0(v_x)$ , которое получается в результате интегрирования выражения (5) по  $v_y$  и  $v_z$ .

Электроны рассматривались с помощью безстолкновительного PIC-метода. На каждом временном шаге координаты электронов использовались для вычисления новых усредненных по площади электростатических зарядов ячеек. Эти заряды вычислялись из зарядов ионного фона, а величины зарядов  $q$  в каждой ячейке использовались для решения уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -4 \pi \rho \quad (7)$$

на сетке из центров ячеек, удовлетворяющего периодическим граничным условиям. Для проблем с большим чем одно число измерений коллеги автора использовали метод последовательной чередной релаксации и прямой метод [14] (в одномерном случае уравнение Пуассона легко решается точно) и нашли, что, несмотря на использование очень тонкого критерия сходимости, релаксационные результаты оказались хуже результатов, полученных

из прямого метода, — полная энергия сохраняется хуже, а, кроме того, первый метод требовал большего времени для вычисления. Причина этого в настоящее время не вполне понятна, но, по-видимому, это следствие требований высокой точности в проблеме, в которых явно рассматриваются относительно малые заряды, в которых явно рассматриваются относительные методы очень хороших зарядов. С другой стороны, релаксационные методы очень хороши работали при вычислении полей  $E$  и  $V$  в квазилокальных областях и в рассматриваемом шпике зарядово-нейтрального примера с периодом  $\beta$ . На новых величинах  $\phi$  для ячеек новые значения электрического поля  $E$  в центрах ячеек получались путем простого вычисления центральных значений.

Скорости и координаты частицы сохранялись в таблице, которая часто записывалась во внешней памяти (дискета или магнитный сердечник) и вводилась в оперативную память маленькими блоками. Когда вычисления доходили до частицы, определялись индексы ближайших соседних ячеек и значения их  $E$ -полей усреднялись по площади, чтобы определить поле в точке нахождения частицы. (Нужно разбить длину, площадь или объем усреднения для двух, четырех или восьми ближайших соседей в зависимости от одного, двух или трех измерений, а это весьма простая операция.) Ввиду этой процедуры  $E$ -поля ячеек будут равномерно распределены по таблице, если ее перестраивать постоянно в соответствии с положением частиц. Если координатами частиц используемыми при решении уравнения Пуассона, являясь допустим, величинами при  $t = 0$ , то крайние с ними скорости  $v$  изменены фактически при  $t = -\Delta t/2$ , где  $\Delta t$  — временной шаг а скорости и координаты изменяются на временном шаге по следующей простой схеме:

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + E_0 \Delta t, \quad x_{i+1} = x_i + v_{i+1/2} \Delta t,$$

где  $E_0$  — поле в момент  $t = 0$ .

Эта система центрирована по времени и, кроме того, обратимая формулы (8) так естественны для чисто электростатических проблем, что вопросов почти не возникает. Однако допустить здесь вместо бы также постоянное магнитное поле  $V$ , так заменилось бы на  $E_0 + v_0 \times V$ . В этом случае скорость  $v_0$  средственно не известна, а должна определяться по схеме, той схеме Рунге — Кутты, справедливой до второго порядка, и вытекающей из подстановки оценки первого порядка  $\approx v_{i-1/2} + E_0 (\Delta t/2)$ .

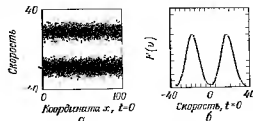
Можно пойти и дальше, требуя, чтобы разностная схема обратимой, т. е.  $v_0 = 1/2 (v_{i+1/2} + v_{i-1/2})$ , и дала бы еще удобное, явное алгебраическое выражение для  $v_{i+1/2}$  вместо и в выражении (8). В плоскости, перпендикулярной вектору

это дает следующий результат:

$$v_{i+1/2} = v_{i-1/2} + \frac{\Delta t}{1 + (\Delta t/2)^2 B^2} \times \left[ E + v_{i-1/2} \times V + \frac{\Delta t}{2} \left( E \times V - \frac{1}{2} v_{i-1/2} B^2 \right) \right]. \quad (9a)$$

Если поле  $V$  не постоянно, а должно определяться самосогласованно по току в плазме, то положение значительно ухудшится. Для такой проблемы Шоки и Морз [10] применили невязку, по поправленной схеме; в обратимых схемах трудно придумать быструю обработку полных урешенной электромагнитной волны.

Необходимость центрирования по времени связана с тем, что перемещение частицы должно быть центрированным по времени



Фиг. 6. а — начальное распределение в фазовом пространстве  $(x, v_x)$  с  $L = 100 \lambda_D$ ; б — функция  $f_0(v_x)$ .

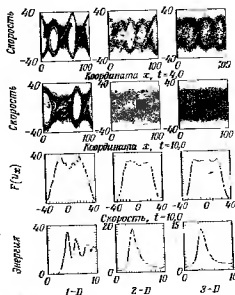
по крайней мере до величины порядка  $(\Delta t)^2$ , а обратимые схемы сами достаточно хороши, чтобы использовать их всегда, когда можно. Это подтвердилось двумерными моделированными электростатических пучковых неустойчивостей, подобных рассмотренным здесь, но при наличии постоянного магнитного поля, направленного перпендикулярно скорости взаимодействующих пучков. Соответствующие расчеты, выполненные Пильсоном и Морзом, продемонстрировали постоянное возрастание полной энергии в случаях, когда член  $v \times V$  не центрировался должным образом. (Напомним, что впервые Оскар Гунеман настойчиво потребовал выполнения обратимости при моделировании плазмы с помощью частиц.)

На фиг. 6 представлены: а) начальное распределение в фазовом пространстве  $(x, v_x)$  случайной подгруппы модельных частиц для двух одинаковых теплых пучковых распределений с  $L = 100 \lambda_D$  и б) функция  $f_0(v_x)$ .

На фиг. 7 представлены результаты: а) одномерного, 1-D, б) двумерного, 2-D, и в) трехмерного, 3-D, сопоставимых расчетов этого



олучая, который был рассмотрен в 1-D-случае с большим  $L$  вом и Пильсомом [12, 13] и продемонстрировал образование, сывание и длительное существование ВСК-мод, видных на фиг. 7. Каждый столбец на фиг. 7 содержит два графика фазового пространства  $(x, v_x)$  (первый относится к моменту насыщения энергии, а второй — к концу интервала в 10 пламенных пер-



Фиг. 7. Диагностика соответствующих магнитных расчетов для одного дуга (2-D) и трех (3-D) камерных.

(не  $10 \omega_p^2$ ), функцию  $f(v_x)$  в конце интервала и график  $v_x$  наименьше во времени полной энергии электростатического в единице объема.

Во всех трех расчетах энергия поля сначала плавно нарадо теплового уровня, а затем резко нарастала до уровня насытия, причем сперва экспоненциально со скоростью нарастания самой быстрой линейной моды и с большей частью энергии в соответствующей интенсивности  $|E_k|^2$ . (Спектр энергии считается, но не приведен здесь.) Такая концентрация энергии более сильно нарастающих мод является естественным следствием экспоненциального нарастания интенсивности этих от малого, однородного уровня спектра начальных шумов [12, 13], показывая, что число модельных частиц должно

достаточно большим, чтобы уменьшить начальный тепловой шум до уровня гораздо ниже уровня насыщения энергии  $\epsilon(t)$  и соответственно получить превышение энергии  $\epsilon$ , т. е. коэффициентов  $|E_k|^2$ , мод со средними длинами волн и с наибольшими инкрементами над спектральной энергией теплового шума, которая пропорциональна  $1/k^2$ . Если эти критерии не выполняются, то правильные бесстолкновительные результаты не накладываются просто на уровень тепловых шумов, а вместо этого разрушаются шумами.

Высота первоначального теплового плато  $\epsilon(t)$  в нашем случае увеличивалась при переходе от 1-D к 3-D из-за возрастающей необходимости экономии числа модельных частиц; в 1-D-расчете использовалось 20 000 частиц, что было более чем достаточно; в 2-D-расчете использовалось 80 000; а в 3-D-расчете использовалось 332 730 частиц, и этого хватало в обрез. Необходимое число частиц можно было бы снизить, уменьшая  $L$ , но ввиду ограничения на число неустойчивых мод используемая здесь длина  $L = 100 \lambda_D$  уже достаточно мала. При счете использовались временной шаг, равный 0,04 пламенного периода, как и в работах Морза и Пильсона [12, 13], но при этом, изложенным там при анализе ошибок.

Числа ячеек в 1-D-, 2-D- и 3-D-сетках были соответственно  $64 \times 64 \times 64$  и  $32 \times 32 \times 32$ . Читатель, который хочет заняться моделированием, должен иметь в виду, что нужно очень осторожно выбирать физическую длину  $L$  и число ячеек в  $L$ . Если целью моделирования является изучение турбулентности плазмы, то длина  $L$  должна быть достаточно большой, чтобы содержать по крайней мере несколько длин волны наиболее неустойчивой в линейном приближении моды. Нелинейное поведение системы, в которой укладывается одна или две длины, может быть интересным, но оно мало что говорит о турбулентности. Использование большего числа ячеек увеличивает плотность фурье-мод в  $k$ -пространстве, которая важна в некоторых случаях турбулентности, и создает возможность для рассмотрения более коротковолновых мод. В связи с этим недавние исследования показали, что коротковолновые моды с относительно малыми энергиями поля,  $|E_k|^2$ , оказываются гораздо более важными при описании некоторых нелинейных процессов, чем это можно было бы предположить на основании распределения энергии.

Наиболее заметное физическое различие существует между случаями 1-D и 2-D. В случае 1-D завихрения в фазовом пространстве сливаются до тех пор, пока на длине  $L$  не останется один дуг, а с после стадии насыщения уменьшается до уровня, соответствующего этой стационарной структуре. Если  $L$  велико, то происходит дальнейшее перемешивание, а  $\epsilon$  выходит на стационарное соответствующее более низкое значение, однако одно завихрение остается и  $\epsilon$  не возвращается к тепловому уровню. В 2-D-случае завихрения начинают формироваться в момент насыщения,

как видно из фиг. 7, но не оформляются полностью и фактически исчезают в конце. Соответственно  $\epsilon(t)$  достигает насыщения в случае при более низком уровне, чем в 1-D-случае (заметим, масштаб на графиках разный), и затем быстро спадает почти начального теплового уровня. Отметим, что насыщение происходит быстрее во времени при переходе от 1-D-к 2-D- и к 3-D-случаю по-видимому, ма-за (по крайней мере частично) последовательное более высоких уровней начальных шумов. В 3-D-случае эти различия с 1-D-случаем становятся настолько более резко выраженными по сравнению с 2-D-случаем, что для количественного сличения с соответствующим экспериментом необходимы результаты 3-D-вычислений. Частично сформированные захлопывания мы отметили, чем в 2-D-случае, а уровень насыщения с еще не. Модельные частицы, показанные на графиках в фазовой плоскости  $(x, v_x)$  для 2-D- и 3-D-случаев, брались из плоского с ограниченного по  $u$  для уменьшения влияния мод с конечными хвостами маскируют появление захлопываний.

Конечные графики  $f(v_x)$  на фиг. 7, которые получены с помощью простой гистограммной процедуры для какого-либо сгладивания, оказываются более гладкими для более многомерных родов в-за-за улучшенной статистики. Все три кривые  $f(v_x)$  составлены на одном и том же интервале скоростей  $(\pm 4\theta)$ , измененных в единицах дебаевской длины, поделенной на плазменный период, и показывают, что 2-D- и 3-D-кривые на хвостах, вне интервала  $\pm 3\theta$ , по существу не изменяются в сравнении с  $f_0(v_x)$ , в то время как в 1-D-случае хвосты расширяются устойчивой вихревой структуры с большой амплитудой. Эта самая вихревая структура дает коническую 1-D-функцию с заметным провалом в середине, тогда как в более многомерных численных экспериментах, в которых плазма в это время и равномерно однородна, функция  $f(v_x)$  является по существу устойчивой на вершине, особенно для 3-D-случая.

До сих пор ничто не было сказано о начальном распределении модельных частиц. В гидродинамическом PIC-методе начальное положение частиц наносится на нечто вроде регулярной шахматной доски с той же периодичностью, как у сетки, и с уменьшениями, определяемыми различными массами частиц. Начальные скорости, когда они требуются, определяются как характеристики. Напротив, в бесстолкновительном PIC-методе модельные частицы должны иметь непрерывное распределение по начальным скоростям и иногда неоднородную начальную плотность, которая согласуется с распределением по скоростям в соответствии с первым самосогласованным стационарным решением бесстолкновительных уравнений. Почти всегда используются максвелловские распределения по скоростям, иногда с разными тепловыми состояниями в разных направлениях и иногда с пространственно-

нородной средней направленной скоростью. Поскольку обычно хотят изучать неустойчивости, которые развиваются из такого равновесия, то начальные условия должны содержать малые отклонения (возмущения) от идеального равновесия, предпочтительно неортогональные каким-либо возможным неустойчивым модам.

В большинстве случаев не следовало бы использовать неоправданное гидродинамическое PIC-распределение масс модельных частиц, поскольку сильное перемешивание частиц из разных частей сетки может затруднить наглядную интерпретацию диаграмм частиц. Эти требования выполняются с помощью выбора случайных чисел для каждой скорости или координаты одной частицы и переноса их затем в интервалах (0, 4) на область скоростей или координат посредством функций или таблиц.

Максвелловские распределения создаются с помощью функционального переноса, включающего логарифмы, синусы и косинусы. Когда необходимо, направленная скорость вычисляется как функция координат и складывается со скоростями частиц, а аннотация получается в результате умножения различных компонент скоростей на соответствующие множители. Кроме того, обычно образуют хвосты с большими скоростями на нескольких тепловых скоростях, чтобы ликвидировать малое число частиц с большой энергией, которые не смогли бы взаимодействовать с сеткой должным образом. Пространственные распределения, когда они неоднородны, как, например, распределения, отвечающие жосткому ядру, можно получить из усредняющей таблицы случайных чисел, которая создается посредством отдельного начального кода. Случайное распределение имеет несколько преимуществ. Помимо распределения в спектре начальных возмущений, оно позволяет избежать систематических ошибок, обусловленных специфической шахматной решеткой, и допускает проверку на чувствительность к начальным условиям и к другим ошибкам в модели простым способом, сводящимся к выбору другого набора случайных чисел и к новому старту задачи.

Что касается явных электростатических проблем, подобных рэстронным виле, в которых ионы трактуются как непрерывный фон, то здесь может быть выдвинуто существенное возражение против отпугивающей процедуры задания начальных условий. Если начальные координаты электронов выбираются случайным образом, то соответствующие флуктуации заряда вызовут недопустимо большие начальные E-поля. Следовательно, электроны нужно размещать однородно в пространстве, а возмущения оставлять только в начальном задании скоростей. Заметим, что это по отношению к двухкомпонентным электростатическим проблемам, в которых и электроны, и ионы трактуются как частицы, поскольку здесь можно просто объединить координаты электронов и ионов в пары, чтобы избежать начальных флуктуаций плотности заряда. В обоих

случаях примерно за один плазменный период энергии элементарного поля достигает уровня тепловых флуктуаций, этот эффект был отмечен и показан на фиг. 7.

Для того чтобы подавить этот уровень флуктуаций и его дифференцию с ожидаемыми физическими результатами при расчете модельных частиц, Дж. Байерс недавно предложил называть более однородное начальное распределение скоростей ординат, которое было названо «сложным стартом». Кажется, что эта схема может правильно передать некоторые нелинейные эффекты, прежде чем первоначально однородная «загружаемая» пространственная исекает и разовьются большие флуктуации.

## 2. Аксиально-симметричная плазма, удерживаемая перекрестными магнитным полем

В качестве примера второго типа моделирования, при котором рассматривается вся удерживаемая плазма, и с целью почитателью, что моделирование применимо не только к электродинамическим проблемам в постоянных магнитных полях, крестом сейчас совершенно другую бесстолкновительную модель, модель двумерная, поскольку все величины зависят от  $r$  и  $z$ , от  $\theta$ . Следовательно, можно наблюдать только моды с  $n=0$  (здесь использовано обычное обозначение теории устойчивости). Эти моды включают вращательную, тирпшовую, желобчатую и шланговую моды, которые в соответствии с линейной теорией будут нарастать, возникать из бесстолкновительного и приближенно не зависящего от  $z$ -равновесия типа равновесия в «Астрономии» в  $\theta$ -плоскости с конечным  $\beta$  (конечное  $\beta$  означает, что существующее магнитное поле не настолько сильно, чтобы его величина искривлялась давлением плазмы).

Электромагнитные поля полностью описываются  $\theta$ -компонентой магнитного векторного потенциала  $A_\theta(r, z, \theta)$ . Это означает, что вычисляются компоненты  $B_r$  и  $B_z$  магнитного поля и индуцируемое электрическое поле  $E_\theta$ , а  $B_\theta$  и все электростатические поля считаются равными нулю. Основанием для этих предположений, там где они применимы, служит то, что холодные электроны могут двигаться вдоль силовых линий магнитного поля к максимумам и минимумам возмущений или через торцевые равновесия цепи, чтобы точно нейтрализовать плазму, и то, что нейтрализующие токи незначительны по сравнению с общими диаметральными азимутальными токами  $J_\theta$ . Эти приближения будут хорошими или плохими, и их нужно рассматривать в каждом случае. Явно рассматривается только один сорт частиц. В случае «Астрономии» это инжектируемые электроны. В высокотемпературного  $\theta$ -плоскости, где, как обнаружено экспериментально, электроны относительно холодные, это горячие

ток  $J_\theta$  вычисляется непосредственно по этому единственному сорту тепловых частиц, а  $A_\theta$  вычисляется по  $J_\theta$ .

Эта методика, пока неочевидная ввиду вышеуказанных приближений, соответствует гамильтоновой системе и является точной, когда плотность и поля стационарны, причем они могут зависеть или не зависеть от  $z$ . Неточность этой модели, когда указанные величины изменяются, зависит от скорости изменения во времени и от типа задачи. В худшем случае эту модель плазмы можно понимать как состоящую из двух сортов частиц с равными массами, но с противоположными зарядами. В этом случае моделирование сводится к точным вычислениям в рамках приближенной модели, а хотелось бы обратного.

Частицы имеют все три скорости вдобавок к двум координатам, поэтому фазовое пространство имеет пять измерений. В большинстве применений частицы имеют максвелловское начальное распределение, которое вращается как твердое тело и не зависит от  $z$ . Такой класс вращающихся максвелловских равновесий, которые имеют  $B_r = 0$ , зависящую от  $r$  плотность и  $B_z \neq 0$ , рассмотрен подробно в трудах конференции [3], а также Дикманом и др. [15, 16], где также обсуждается используемая безразмерная система единиц. Начальный тепловой разброс вдоль  $z$  делается большим или меньшим, чем перпендикулярная (т. е. по  $r$  и  $\theta$ ) температура, чтобы стимулировать соответственно шланговую или желобчатую неустойчивости.

Используя размерные единицы, определим ток в ячейке в результате суммирования по всем частицам в этой ячейке:

$$J_{\theta c} = Q \sum_{i=1}^{N_c} \frac{v_{\theta i}}{r_i}, \quad (9)$$

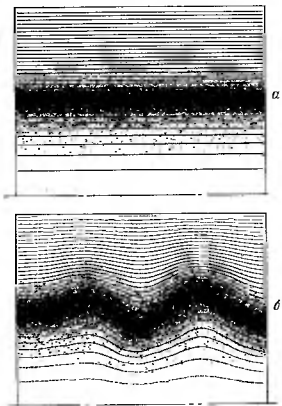
где  $N_c$  — число частиц в ячейке,  $Q$  — число настоящих частиц в модельной частице, а  $r_i$  — радиус частицы. Множитель  $1/r_i$  обусловлен тем обстоятельством, что модельная частица представляет собой кольцо с постоянным полным зарядом и потому имеет больший заряд на единицу длины, когда находится при меньшем радиусе. Скорость  $v_\theta$  каждой частицы определяется прямо из закона сохранения ее канонического углового момента

$$P_\theta = r(v_\theta + A_\theta) = \text{const}, \quad (10)$$

который вычисляется и запоминается вначале. Тогда

$$J_{\theta c} = Q \sum_{i=1}^{N_c} \frac{1}{r_i} \left( \frac{P_{\theta i}}{r_i} - A_{\theta i} \right). \quad (11)$$

Значительное упрощение в вычислениях достигается в результате введения статистического предположения о том, что частицы



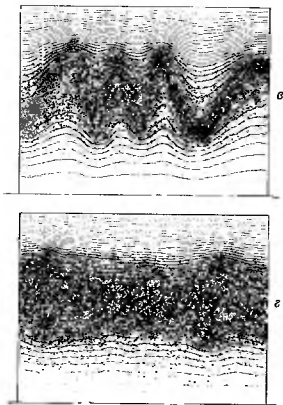
Ф и г. 8 (а-б). Распределения частиц в ячейке ( $r, z$ ), полученные в результате расчета плазменной неустойчивости.

в каждой ячейке распределены однородно по этой ячейке образом, что величины  $r_i$  и  $A_{ei}$  в формуле (14) можно записать в зависимости от их величины  $r_c$  и  $A_{ec}$  в центре ячейки. Иногда для (14) принимает вид

$$J_{ec} = \frac{Q}{r_c} \left( \frac{1}{r_c} \sum_{i=1}^{N_c} P_{ei} - N_c A_{ec} \right).$$

После выполнения суммирования в (11а) потенциал  $A_0$  является из размерного уравнения для поля:

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_0 \right) = -J_0.$$



Если формулу (11а) подставить в обычную разностную форму второго порядка для уравнения (12) и использовать метод последовательной верхней релаксации (SOR), то окончательная итерационная схема для значений  $A_0$  в центре ячейки примет вид

$$A_0(J, K) = \frac{W}{D(K) + [CGN(J, K)]r(K)} \times \left\{ G^2 A_0(J+1, K) + G^2 A_0(J-1, K) + B(K) A_0(J, K+1) + C(K) A_0(J, K-1) + \frac{QG}{r^2(K)} \sum_{l=1}^{N(J, K)} P_l \right\} + (1-W) A_0(J, K), \quad (13)$$

$$B(K) = 1 - \frac{1}{2K-1},$$

$$C(K) = 1 - \frac{1}{2K-1},$$

$$D(K) = r \left[ \frac{C^2-1}{2} + \frac{1}{2K-1} \right],$$

$$G = \frac{\Delta r}{\Delta z};$$

$J$  и  $K$  —  $r$ - и  $z$ -индексы центров ячеек соответственно, а значения используются в правых частях там, где выгодно. Граничные условия на  $A_0$  устанавливаются во время релаксации. На практике используются линейные экстраполяции от последних временных шагов, чтобы получить начальные значения потенциалов  $A_0$  ( $J, K$ ) для итерационного решения уравнения (13). Если шаг  $\Delta t$  достаточно мал, чтобы обеспечить приемлемую точность в других частях проблемы, то эти экстраполированные значения оказываются превосходными начальными приближениями. Любое сравнение итерационных методов с другими методами, например с преобразованием Фурье, незаконно, если не учесть этот факт. Практически сходимость с точностью до  $10^{-3}$  достигается после 10–20 итераций с SOR-фактором  $W \approx 1,7$ . Если использовать достаточное число частиц, чтобы удержать статистические флуктуации на приемлемом уровне, то эти итерации отнимают примерно 15% от полного времени вычисления. После определения  $A_0$  ( $J, K$ ), поля  $B_r$  и  $B_z$  вычисляются по формуле  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , или

$$B_r = -\frac{\partial A_0}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_0),$$

методом центрированных разностей. Выходя из этого местоположения частицы известны в текущий момент, а компоненты скорости  $V_r$  и  $V_z$  известны в предшествующее время, откуда на половину временного шага. Далее частицы перемещаются в соответствии с уравнениями движения

$$V_{0,z} = \frac{r_0}{r_0} A_0,$$

$$V_{r,z+1/2} = V_{r,z-1/2} + \left[ V_{0,z} B_z + \frac{V_{0,z}^2}{r} \right] \Delta t,$$

$$V_{z,z+1/2} = V_{z,z-1/2} - V_0 B_r \Delta t,$$

$$r_{z+1} = r_0 + V_{r,z+1/2} \Delta t,$$

$$z_{z+1} = z_0 + V_{z,z+1/2} \Delta t.$$

Взяты в таком виде, эти уравнения центрированы во фактически обратном (полезный результат сохранения  $P_0$ ) достаточно, чтобы избежать обрывания порядка ( $\Delta t$ ).

Величины  $A_0$ ,  $B_r$  и  $B_z$  в уравнениях (15) определяются для каждой частицы отдельно путем усреднения по ближайшим центрам ячеек. Нужно заметить, что пока

не было необходимости использовать усреднение по площади при вычислении сумм в уравнении (13) для  $J_0$  и  $N_c$ .

На фиг. 8 представлена последовательность распределений частиц в плоскости  $(r, z)$ , полученных из численного расчета плазменного неустойчивости. Нижний край соответствует оси цилиндра, верхний край является электропроводящим, т. е. здесь  $A_0 = \text{const}$ , граничные и отражающие условия применяются как для  $A_0$ , так и для движения частиц на концах. Нанесенные линии являются линиями уровня функции потока  $rA_0$  и, следовательно, силовыми линиями магнитного поля. Начальное поле  $B_z$  изменяет свое направление на обратное между внутренней и внешней сторонами слоя плазмы, обращаясь в нуль в середине. Система неустойчива, поскольку начальная температура  $T_z$  вдоль  $z$  в 25 раз больше поперечной температуры  $T_r$ . В этом расчете было использовано  $2 \cdot 10^4$  модельных частиц и решетка  $25$  ( $\text{по } r$ )  $\times$   $400$  ( $\text{по } z$ ). Временной шаг составляет примерно  $\frac{1}{2}$  ларморовского периода частицы в вакуумном магнитном поле.

Физический результат этого счета заключается в том, что деформация плазмы и поля нарушила  $z$ -симметрию и вследствие этого вызвала выравнивание  $T_z$  и  $T_r$ . Впоследствии плазма опять обрываетывала не зависящий от  $z$  слой с большей толщиной по  $r$ , чем вначале, из-за возросшей температуры  $T_r$ . Применение этой модели к железобетонным и титановым модам можно найти в работах Дикмана и др. [15, 6]. Применение к потерям с торца из 6-шпика можно найти в работе Така [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Amsden A. A.*, Los Alamos Report LA-3166, 1966.
2. *Builer T. D., Henins F., Jahoda F., Marshall J., Morse R. L.*, Phys. Fluids, 12, 1904 (1969).
3. Proceedings AFS Top. Conf. Pulsed, High-Density Plasmas (Sept., 1967). Вычислялся как Los Alamos Report LA-3770.
4. *Алорзон А. И.*, ЗИФ, 38 (1968).
5. *Builer T. D., Cook J. L., Morse R. L.*, Paper 6 в трудах Proc. AFS Top. Conf. Numerical Simulation of Plasma (Sept., 1968). Вычислялся как Los Alamos Report LA-3990.
6. *Dickman D., Morse R. L., Nielson C. W.*, Phys. Fluids, 12, 4768 (1969).
7. *Tack J. L.*, Paper K-5 в трудах Third. Intern. Atomic Energy Agency Conf. Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Research. Novosibirsk, USSR (Aug., 1968).
8. *Kilten J., Rompel S. J.*, Journ. Comput. Phys., 1, 29, 1966.
9. *Kahn H.*, Mathematical Methods for Digital Computers, eds. A. Rolsten and H.S. Wilf, New York, 1965.
10. *Shank C. R., Morse R. L.*, Paper C3 в трудах [5].
11. *Morse R. L.*, Los Alamos Report LA-3644-MIS, 1968.
12. *Morse R. L., Nielson C. W.*, Paper A4 в трудах [5].
13. *Morse R. L., Nielson C. W.*, Phys. Fluids, 12, 2448 (1969); Phys. Rev. Lett., 23, 1087 (1969).
14. *Buznec B. L., Golub G. H., Nielson C. W.*, Los Alamos Report LA-4141, LA-A-268; см. также SIAM Journ. Numer. Anal. (1969).
15. *Dickman D., Morse R. L., Nielson C. W.*, Paper C2, в трудах [5].

# ФИЗИКА СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПЛАЗМЫ

Ч. Бэрдсоль, А. Лендон, Х. Окуда\*

## § 1. Введение

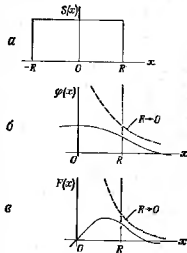
Моделирование плазмы с использованием ионов и электронов как частиц способом воспроизведения все электрические и магнитные взаимодействия реальной плазмы. Конечно, при полном моделировании трудно следить за всеми ионами и электронами плазмы. Поэтому обычно используют меньшее число частиц, каждая из которых имеет большой заряд, но это приводит к увеличению тушайки около средних значений (например, флуктуации плотности  $\sim 1/\sqrt{n}$ ) или шуму частиц (более точное название — дробовой шум). Другая трудность — физическое взаимодействие частиц с границей сетки и временными сетками, используемыми для моделирования таких величин, как плотность, потенциалы, поля, силы, давление также увеличивает шум (называемый сеточным шумом). Дробовой, так и сеточный шум легко могут стать настолько большими, что замаскируют планируемое моделирование.

Численно можно уменьшить эффекты от дробового или сеточного шума, увеличивая число частиц или используя более крупные сетки. Такие улучшения были внесены в одномерные расчеты в двумерные они внедряются, а в трехмерных они в настоящее время неосуществимы. У нас нет возможности не иметь детали (и шумов) очень немногих частиц и очень грубыми следствиями, мы должны понять эту физику и найти подходящие способы для уменьшения шума.

Электроны и ионы можно рассматривать как точечные заряды в большинстве задач физики плазмы. Часть взаимодействий частицами происходит на малых расстояниях и за короткое время является причиной эффектов в области коротких длин волн и частот; к счастью, детали таких взаимодействий относительно малоинтересны для плазмы. Главные эффекты обусловлены *дальними взаимодействиями*, которые соответствуют длинам волн, гораздо большим, чем расстояния между частями и частотам, периодам которых много больше, чем времена столкновений частиц. Такая физика допускает введение некоторой *средней взаимодействия* сил на близких расстояниях. Исследова-

ния вопроса, как численное, так и физическое, в большинстве случаев приводит (см. § 6) к концепции использования *частиц конечного размера*. В данной главе рассматривается физика плазмы, состоящей из таких укрупненных частиц (облаков); последние представляют реальный интерес, поскольку облака в форме листов (одномерный случай), стержней (двумерный) или кубов (трехмерный) сейчас используются для моделирования плазмы по существу все плазменные лаборатории.

Облака являются настолько укрупненными, что они могут свободно проходить друг через друга и иметь любую подходящую форму и распределение плотности — например, однородное или гауссово. Прежде чем переходить к тонкостям теории, укажем некоторые свойства облаков. Допустим, что плотность облака, задаваемая фактором  $S(x)$ , соответствует графику, представленному на фиг. 1, а для облака радиусом  $R$  с однородной плотностью. Предположим, что облако является пробной частицей, находящейся в точке  $x=0$  в двух- или трехмерной плазме, состоящей из аналогичных облаков. Тогда потенциал вблизи этой точки будет уменьшаться так, как показано на фиг. 1, б, причем в начале координат не будет расходимости, которая была бы для частицы нулевого радиуса ( $R \rightarrow 0$ ). Сила, с которой пробная частица действует на облако в точке  $x$ , показана на фиг. 1, в; сингулярность снова отсутствует. Видно также, что не только устраняются расходимости на близких расстояниях, как в плазмываляды, но и появляется возможность для суще-



Фиг. 1. а — фактор  $S(x)$ , определяющий изменение плотности облака радиусом  $R$  с однородной плотностью.

Облако представляет собой плоский лист в одномерном случае, цилиндрический стержень в двумерном и сферу в трехмерном. Формулы (8, 9) не относятся к выводу, но в последующем на основании это, как показано, вытекают.

б — сравнение потенциала  $\Phi(x)$  внутри и вне облака  $a$  с потенциалом точечной частицы ( $R=0$ ). Облако находится среди других облаков в четкой плазме, поэтому имеет место экранирование.

в — график силы, с которой пробное облако, находящееся в точке  $0$ , действует на облако, находящееся в точке  $x$ .

Потенциал и сила, а следовательно, и другие свойства (например, формулы (рассказы)) для облаков другой формы, например для распределения Гаусса  $S(x) = \exp(-x^2/2R^2)$ , весьма полезны по характеру и величине, если сделать соответствующие изменения и определить результирующую, например, однородное  $\approx 2/\sqrt{\pi}$  Гауссово.

\* Charles K. Birdsall, A. Bruce Langdon, H. Okuda, Electrical Engineering and Computer Science Departments, University of California, Berkeley, California.

иниях; последнее происходит при  $R > \lambda_D$ , где  $\lambda_D$  — дебаевская длина.

Простые критерии для реализации указанных преимуществ следующие: 1) облака должны много раз пересекаться,  $N_c \gg 1$ , где  $N_c$  — число облаков, находящихся в объеме  $\Omega$  ( $N_c = nR^3$ ); 2) радиус  $R$  должен быть достаточно большим, чтобы устранить нежелательные взаимодействия на близких расстояниях по сравнению с малым, чтобы допустить взаимодействия, которые соответствуют большим длинам волн; 3)  $2R \gg \Delta x$ , где  $\Delta x$  — ячейка сетки (если используется сетка), для уменьшения шума.

Первоначальные теории систем конечного размера содержат ряд соображений в пользу систем без сеток [11] и с сетками. Концепция облаков объединяет такие системы и, по-видимому, является самой простой интерпретацией остающихся сложных взаимодействий. Теория систем с сетками (Лендон<sup>1)</sup>) поддала эту концепцию. Общее заключение таково, что хорошие системы с сетками весьма редки на системы без сеток с подлинными взаимодействиями, которое можно потом трактовать как нулевое взаимодействие между соответствующими облаками.

В этой главе рассматривается теория систем с сетками, представляющая собой краткое изложение результатов Ландау и Бардосла<sup>1)</sup>, Окуды и Бардосла<sup>1)</sup>, а также Уонга и Сола<sup>1)</sup>.

## § 2. Общая теория модели частиц конечного размера

Теорию взаимодействий в системе облаков можно непосредственно получить из существующей теории взаимодействий отдельных частиц. При этом плотность заряда облака, центр которого находится в начале координат, изменится от  $q\delta(\mathbf{x})$  к  $q$ , где  $q$  — полный заряд. Если  $\mathbf{J}_p$  и  $\rho_p$  — плотности тока и заряда системы точечных частиц, то плотности  $\mathbf{J}_c$  и  $\rho_c$  для систем облаков, центры которых совпадают с точечными частицами, равны

$$\begin{pmatrix} \rho_c(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{J}_c(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \int d\mathbf{x}' S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \begin{pmatrix} \rho_p(\mathbf{x}', t) \\ \mathbf{J}_p(\mathbf{x}', t) \end{pmatrix}.$$

Для нахождения полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  эти плотности облаков нужно вставить в уравнения Максвелла. В результате сила Лоренца, действующая на облако с центром в точке  $\mathbf{x}$  и скоростью  $\mathbf{v}$ , имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = g \int d\mathbf{x}' S(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left( \mathbf{E}(\mathbf{x}', t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}', t) \right).$$

<sup>1)</sup> Непубликованные результаты, 1968.

Поскольку полученные выражения содержат свертки, то их можно упростить, используя преобразование Фурье:

$$\begin{pmatrix} \rho_c(\mathbf{k}, t) \\ \mathbf{J}_c(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix} = S(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \rho_p(\mathbf{k}, t) \\ \mathbf{J}_p(\mathbf{k}, t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{k}, \mathbf{v}, t) = gS(-\mathbf{k}) \left( \mathbf{E}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{k}, t) \right), \quad (4)$$

где

$$S(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{x} \quad (-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}).$$

Теперь можно воспроизвести большую часть теории плазмы путем замены заряда  $q$  на  $gS(\mathbf{k})$ . Напротив, тензор диэлектрической проницаемости однородного бесстолкновительного газа из облаков в приближении Власова и, следовательно, дисперсионные соотношения не изменяются по форме, за исключением того, что квадрат плазменной частоты  $\omega_p^2$  нужно всюду умножить на  $S^2(\mathbf{k})$ . Однако нужно проявлять некоторую осторожность; например, в однородном внешнем магнитном поле правильное значение  $k_z$ , которое нужно использовать в дисперсионной частоте пучкового порядка  $\omega_{ce} = gS(k)/mc$ , равно 0, поэтому  $\omega_{ce}$  не меняется по сравнению с величиной для точечной частицы.

Рассмотрим теперь два примера, чтобы пояснить переход к теории облаков.

### 1. Продольные плазменные колебания малой амплитуды

Продольная диэлектрическая проницаемость плазмы из облаков имеет вид

$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 + S^2(\mathbf{k}) \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \quad (6)$$

где введены стандартные обозначения. Зависимость от времени и координат выбрана в виде  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$  и использованы обычные соображения относительно аналитических свойств. Для максвелловского распределения по скоростям без дрейфа и с тепловой скоростью  $v_T = (U_s^2 / \epsilon^2)^{1/2}$  диэлектрическая проницаемость принимает вид

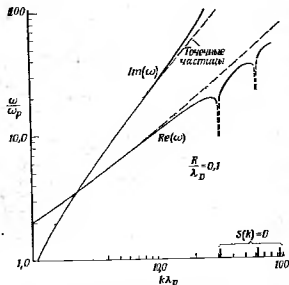
$$\epsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{S\omega_p}{k v_T} \right)^2 Z \left( \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_T} \right), \quad (7)$$

где  $Z$  — плазменная дисперсионная функция [7].

Дисперсионное соотношение для продольных волн имеет вид  $\epsilon = 0$ . Точные  $\omega - k$ -диаграммы представлены на фиг. 2 для малых облаков ( $R = 0, \lambda_D$ ) и на фиг. 3 для больших облаков ( $R = 2\lambda_D$ ), причем в обоих случаях плотность облака однородна.

Почувствительно выписать аналитически, где и почему эти результаты отличаются от результатов для точечных частиц, которые известны выше.

В случае  $k\lambda_D S \ll 1$  можно использовать аналитическое разложение для  $Z'$  при больших аргументах и



Фиг. 2. Дисперсионная диаграмма: зависимость частоты  $\omega$  от числа  $k$  для однородной тонкой максвелловской плазмы из малых  $k$  с однородной плотностью ( $R = 0, \lambda_D$ ).

Согласно с результатами для плазмы, состоящей из точечных частиц, в целом все это делается хуже в области, где преобладает затухание, но лишь тогда возникают впечатляемые расхождения. Сингулярности появляются при очень больших  $\omega$ , когда в области помещаются одна, две или три длины волны.

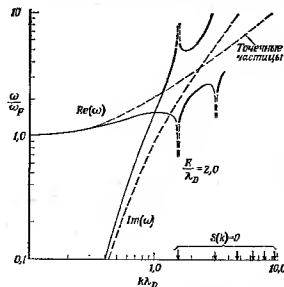
приближенное решение для  $\omega$ , которое соответствует слабому затуханию колебаний из-за эффекта Ландау (см. [8]),

$$(\text{Re } \omega)^2 \approx S^2(k) \omega_p^2 + 3k^2 v_{th}^2, \\ \text{Im } \omega \approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} S \omega_p \left( \frac{S}{k\lambda_D} \right)^3 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{S}{k\lambda_D} \right)^2 - \frac{3}{2} \right].$$

В случае малых облаков ( $R < \lambda_D$ ) и слабого затухания  $< k\lambda_D \ll 1$ , поэтому  $S \approx 1$ . Таким образом, как можно ожидать, слабо затухающие колебания изменяются мало, подтверждается фиг. 2.

В случае больших облаков ( $R > \lambda_D$ ) и слабого затухания может сильно отличаться от значения для точечных частиц  $kR > 1$ , что видно из фиг. 3.

В случае  $k\lambda_D S \gg 1$  колебания сильно затухают. Таким образом, в плазме из облаков при увеличении  $k$  затухание резко нарастает, когда  $k\lambda_D \sim 1$  или когда  $kR$  достигает достаточно больших значений (см. фиг. 2 и 3). Для некоторых форм облаков, например для облаков с однородной плотностью  $\{S(k) = \sin kR/kR\}$ ,  $S \rightarrow 0$  при конечных  $k$ . Когда это происходит, асимптотические решения



Фиг. 3. Дисперсионная диаграмма, подобная фиг. 2, но для толстых облаков  $R = 2\lambda_D$ .

Или этот ряд при  $kR > 1$  становится расходящимся (это соответствует теперь  $\lambda_D = 0,5$ ), увеличивается на изменение формы и дисперсионной области по сравнению со случаем точечных частиц и пренебрежимо и сгустится при использовании облаков большого размера.

Для сильного затухания ведут себя так, что  $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ ,  $\text{Re } \omega \rightarrow 0$ , как было уже показано на фиг. 2 и 3. Конечно, когда  $S$  очень мало, электрическое взаимодействие нарушается, облака не взаимодействуют и их поведение во времени не описывается более функцией  $\exp(-i\omega t)$ .

## 2. Потенциальная энергия экранированного пробного облака; статическая сила

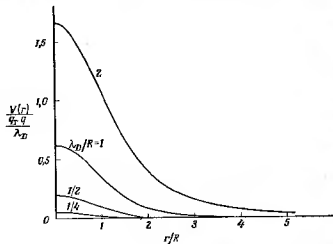
В линейном приближении потенциал пробного облака, центр которого движется через однородный устойчивый бесстолкновительный газ и имеет координаты  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t$ , определяется



выражением

$$\varphi(\mathbf{k}, t) = \frac{4\pi q S(\mathbf{k})}{k^2 \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0)} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t)].$$

Допустим, что пробное облако в горячей плазме находится в начале координат; тогда для потенциальной энергии облака



Фиг. 4. Потенциальная энергия в окрестности шарового пробного однородной плотности с зарядом  $q$ , находящегося в тепловой плазме из двух облаков.

Отметим наиболее значимое значение потенциала  $V(0)$  и быстрый спад его при возрастании  $r$ .

$V(\mathbf{k}) = qS(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k})$  получим

$$V(\mathbf{k}) = \frac{4\pi q^2 S^2(\mathbf{k})}{k^2 \epsilon(\mathbf{k}, 0)} = \frac{4\pi q^2 S^2}{k^2 + S^2/\lambda_D^2}.$$

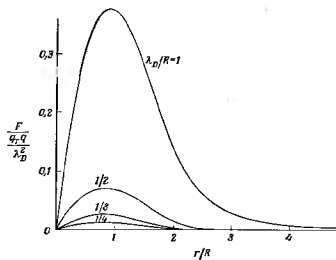
В качестве примера на фиг. 4 представлен график  $V(x)$  для случая с однородной плотностью.

В случае малых облаков ( $R \ll \lambda_D$ ) можно заменить  $S$  на 1 в знаменателе выражения (14), поскольку  $k^2 \gg S^2/\lambda_D^2$ , там, где  $S$  только отличается от единицы. Таким образом, энергия приблизительно совпадает с энергией для точечной частицы, жонкой на квадрат  $S(x)$ , и, следовательно, отличается от энергии точечной частицы только в области  $r \ll R$ , где она представляет неэкранированную потенциальную энергию облаков, а в остальных частях. Максимальная энергия

$$V(x=0) \sim \frac{4\pi q^2}{R} = \frac{0}{N_D} \frac{\lambda_D}{R},$$

где  $N_D = n\lambda_D^3$ , может стать меньше тепловой энергии  $\theta$ , позволив облакам легко проходить друг через друга и подавляя соударения, приводящие к большим отклонениям.

В случае больших облаков,  $R > \lambda_D$ , потенциальная энергия существенно другая из-за того, что плазма может поддерживать зарядовую нейтральность на расстояниях  $r > R$  и  $\lambda_D$ ; нейтрализующий плазму заряд находится внутри пробного облака, а не



Фиг. 5. Сила  $F$ , с которой сферическое облако однородной плотности, выходящее в точке  $r=0$ , действует в тепловой плазме на облако, находящееся в точке  $r$ .

Максимальное значение  $F$  (и приблизительно вся кривая) инвариантна примерно пропорционально  $(\lambda_D/R)^2$ , поэтому близкие и дальние взаимодействия быстро уменьшаются с ростом  $R$ . Кроме для двумерного и одномерного случаев, подобия проводимости, по потенциальной энергии  $V$  замещается на  $z$  и  $1$  соответственно.

снаружи, как раньше. Это проявляется в следующем: при  $k < k_c$  энергия  $V(k)$  близка к  $4\pi q^2 \lambda_D^2$ , затем спадает к нулю как  $4\pi q^2 S^2/k^2$ , когда  $k$  становится больше  $k_c$ , где  $k_c$  находится из равенства  $k_c^2 \lambda_D^2 = S^2(k_c)$ . Если  $S$  быстро падает до нуля при  $k > R^{-1}$ , то  $k_c \sim R^{-1}$ . График  $V(k)$  будет иметь ширину  $\sim R$ . Учитывая это и общие свойства преобразований Фурье, мы заключаем, что радиус  $V(x)$  будет порядка  $k_c^{-1} \sim R$  и  $V(x)$  может иметь несколько осцилляций благодаря резкому спаду  $V(k)$ ; эти свойства продемонстрированы на фиг. 4. Кроме того, поскольку

$$\int dx V(x) = V(k=0) = 4\pi q^2 \lambda_D^2$$

не меняется, когда радиус увеличивается, то необходимо, чтобы величина  $V(x=0)$  уменьшалась до  $\sim 4\pi q^2 \lambda_D^2 / R^2 \sim \theta / N_D$ .  $N_D \approx nR^3$  характеризует количество перекрывающихся облаков.  $N_D \gg 1$  большие облака легко проходят друг через друга с большими отклонениями. Следовательно,  $N_D$  в плазме из облаков играет ту же роль, что  $N_D$  в плазме из точечных частиц.

Соответствующая статическая сила  $F = -\nabla V$  представлена на фиг. 5. Максимум силы  $F$  в точке  $r \approx R$ , так же как величина  $F$  при любых  $r$ , уменьшается примерно как  $(\lambda_D/R)^3$  в трехмерном случае и приблизительно как  $(\lambda_D/R)^2$  и  $(\lambda_D/R)$  соответственно в двумерном и одномерном случаях. Следовательно, увеличение от нуля быстро уменьшает силу и сечение рассеяния, которое рассматривается в следующем параграфе.

### § 3. Сечение рассеяния

Выше мы использовали уравнение Власова и пренебрегли столкновениями. В реальной плазме оправданием такого пренебрежения является условие  $N_D \gg 1$ , которое трудно выполнить при двумерном моделировании и нереально по затратам при одномерном моделировании. Следовательно, нам нужна средняя частота столкновений или сечение рассеяния для облаков с соответствующим значением для точечных частиц. Сначала мы делаем это, используя статическую силу, которая найдена в следующем параграфе, и определяем транспортное сечение рассеяния для трехмерного случая,

$$\sigma = 2\pi \int (1 - \cos \theta) p \, dp,$$

где  $p$  — прицельный параметр и  $\theta$  — угол рассеяния.

Для плазмы из точечных частиц существует небольшое разделение между транспортными коэффициентами и, следовательно, сечениями рассеяния, полученными для кулоновского взаимодействия с дебаевским обрезанием, и результатами для экранированного кулоновского взаимодействия без обрезания. Кулоновское взаимодействие ( $\sim 1/r^2$ ) сечение рассеяния выражается

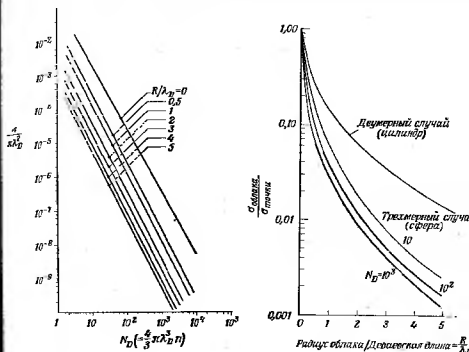
$$\sigma_{\text{точечная}} = \frac{4\pi q^4}{(m_i e)^2} \ln \left[ \frac{m_i v^2 \lambda_D}{q^2} \right] \approx \frac{4\pi q^4}{(m_i e)^2} \ln \Lambda = \frac{4\pi q^4}{(m_i e)^2} \ln 9N_D,$$

где  $\Lambda = m_i v^2 \lambda_D / q^2 = 9N_D$ , и  $m_i v^2$  заменено на среднее значение  $3kT_e$ , что возможно для  $i = e$  и  $i = e$ -соударений;  $m_i$  — протонная масса,  $v_r$  — относительная скорость.

При рассеянии облаков потенциальная энергия хорошо себя аналитически, т. е. не имеет сингулярностей, но не является простой функцией от  $r$ , поэтому интегрирование для нахождения

проводилось численно. На фиг. 6 приведены результаты для облаков с однородной плотностью.

Если  $R/\lambda_D$  достаточно велико, то сечение рассеяния облаков гораздо меньше, чем точеч. Это ясно видно из фиг. 7, где пред-



Фиг. 6. Сечение рассеяния для столкновений, определенное по статической силе в теплой плазме из сферических облаков с однородной плотностью и потому применимое к облакам, скорость которых меньше тепловой скорости.

Существование моментов моделирования указывает то, что увеличение сечения, которое происходит, когда  $N_D$  уменьшается от значения для реальной плазмы и, значимо, подпадает под действие ЭВМ, только частично компенсируется увеличением радиуса облака  $R$ .

Фиг. 7. Отношение сечений для облаков и для точечных частиц как функция радиуса облака.

Наблюдается сильное уменьшение отношения при малом увеличении радиуса облака от нуля. Модель такая же, как в случае фиг. 6.

ставлен график отношения  $\sigma_{\text{облака}}/\sigma_{\text{точечная}}$ , а также соответствующий график для двумерных облаков с однородной плотностью (в сравнении с линейным зарядом). Переход к облакам с гауссовым распределением  $S(r) = \exp(-r^2/2R^2)$  происходит примерно при  $R_{\text{облака}} = R_{\text{линейное}} \approx 2R_{\text{гауссово}}$ .

### 1. Связь с бесстолкновительным подходом в численном моделировании

Рассмотрим двумерную плазму с размерами  $100 \lambda_D$  на  $100$ . Частота столкновений точечных (линейных) частиц равна

$$\nu \approx n v \approx n v_{\text{те}} \approx \frac{2 \omega_{pe}}{16 N_D},$$

где  $N_D = \lambda \lambda_D^3$ . Если мы потребуем выполнения условия  $\nu/\omega_{pe} \ll 1/1000$ , то для точечных частиц будет нужно  $N_D \sim 200$ , так полное число частиц  $N$  будет равно  $600\,000$ . Если мы требуем  $\nu/\omega_{pe} \ll 1/1000$  для плазмы из облаков и выбираем  $N_D \sim 2$ , тогда из фиг. 7 видно, что нам нужно  $R/\lambda_D = 1,3$  и только 60 облаков; если же выбрать  $N_D = 2$ , то нужно  $R/\lambda_D \sim 6$  и примерно 6000 облаков.

Для трехмерной плазмы с размерами  $100 \lambda_D \times 100 \lambda_D \times 100$  частота столкновений точечных частиц равна

$$\frac{\nu}{\omega_{pe}} \approx \frac{1}{27} \frac{1}{N_D} \ln(9 N_D).$$

Если мы потребуем  $\nu/\omega_{pe} < 1/1000$ , то для точечных частиц  $N_D = 300$  и  $N = 72$  миллиона частиц. Для облаков  $\nu/\omega_{pe} \ll 1/1000$  в случае  $N_D = 30$  требуется  $R/\lambda_D = 1,3$ ,  $N = 7,2$  миллиона, а в случае  $N_D = 1$  требуется  $R/\lambda_D > N = 240\,000$ .

Такое уменьшение числа частиц в 40 и 100 раз, необходимое для снижения эффектов от соударений, делает более реальным моделирование плазмы больших размеров с использованием методики точных траекторий. Примером успешного применения этой идеи является недавний эксперимент Морза и Нильсона. Они работали с  $N = 332\,750$  облаками в трехмерной плазме в виде куба с ребром  $100 \lambda_D$ , находящейся в сетке  $32 \times 32 \times 32$ . В этих параметрах  $\lambda \lambda_D^3 \approx 0,3$ , так что, будь частицы точками, нельзя было бы рассматривать как плазму. Однако частицы Морза и Нильсона можно трактовать как облака с  $N_c \approx n(\Delta x)^3$ , поэтому можно надеяться, что они будут вести себя как плазма. Используя теперь формулу (15) и фиг. 7, получаем  $(\nu/\omega_{pe})_{\text{облаков}} \approx 1/240$ . Поскольку их выселение продолжалось до  $T \approx 10$  плазменных периодов, величина  $\nu T \approx 1$  и нельзя было пренебрегать эффектами от столкновений. Кроме того,  $\lambda_D \approx 0,3 \Delta x$  сеточный шаг (см. § 5) также может оказаться существенным.

### § 4. Коэффициенты трения и диффузии Фоккера — Планка для плазмы, состоящей из облаков

Вышеизложенные результаты, использующие статическую силу, применимы главным образом к частицам плазмы со скоростями, меньшими тепловой,  $v < v_{\text{те}}$ . Теперь мы обобщим эти результаты, используя кинетическое уравнение Балеску — Ленарда, пригодное для любых  $v$ .

Рассмотрим сначала трехмерную однокомпонентную пространственно однородную плазму в отсутствие макроскопического поля. Выделим пробное облако и найдем эволюцию функции распределения пробного облака благодаря столкновениям с окружающей плазмой. Допустим, что функция распределения по скоростям основной плазмы является максвелловской и не меняется во времени из-за взаимодействия с пробным облаком. Кинетическое уравнение Балеску — Ленарда для функции распределения  $f(\mathbf{r}, t)$  пробного облака можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} \left( D_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j} \right) + \frac{\partial}{\partial v_i} (A_i f), \quad i, j = x, y, z, \quad (16)$$

где введены коэффициенты диффузии

$$D_{ij}(\mathbf{v}) = 2q^2 n \int \frac{1}{k^4} \frac{|k_i k_j|}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'|^2} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') F(\mathbf{v}') d\mathbf{k} d\mathbf{v}' \quad (17)$$

и коэффициенты трения

$$A_i(\mathbf{v}) = 2q^2 n \int \frac{1}{k^4} \frac{|k_i k_j|}{|\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'|^2} \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}') \frac{\partial F(\mathbf{v}')}{\partial v_j} d\mathbf{k} d\mathbf{v}'. \quad (18)$$

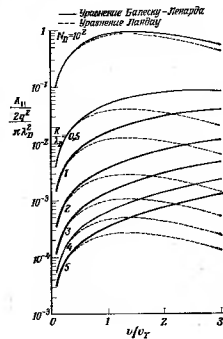
По всем повторяющимся индексам  $i, j$  выполняется суммирование.  $F(\mathbf{p})$  — трехмерное максвелловское распределение по скоростям основной плазмы:

$$F(\mathbf{p}) = \frac{\exp(-p^2/2m^2 v_{\text{те}}^2)}{(V \sqrt{2\pi} m v_{\text{те}})^3},$$

е  $(\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$  — диэлектрическая проницаемость плазмы, которая определена формулой (7).

Величины коэффициентов  $A_{\parallel}$ ,  $D_{\parallel}$  и  $D_{\perp}$  зависят в основном от  $N_D$  для точечных частиц или от  $R/\lambda_D$  для облаков. При малых  $\nu/\omega_{pe}$  ( $\nu/\omega_{pe} \ll 1$ ) коэффициент  $A \sim \nu/\omega_{pe}$ ; это означает, что  $A \sim \nu r$ , где  $\nu$  — частота соударений в уравнении типа Ланжевена, которое использовалось в предшествующих вычислениях статической силы, обусловленной столкновениями. Было обнаружено, что отношение сечений рассеяния облака и точечной частицы (фиг. 7)

имеет тот же порядок, что и отношение полученных здесь коэффициентов  $A_{II}$  (фиг. 8). Однако убывание коэффициента  $A_{II}$  с увеличением размера облака зависит также от скорости облака. Например, при  $v/v_T = 0,5$  отношение  $A_{II}$  ( $R/\lambda_D = 0$ ,  $N_D = 10^3$ )/ $A_{II}$  ( $R/\lambda_D = 5$ )  $\approx 5 \cdot 10^3$ , в то время как при  $v/v_T = 3$  это отношение составляет примерно  $2,5 \cdot 10^3$ .



Фиг. 8. Коэффициент трения  $A_{II}$  (полученный из кинетического уравнения, пригодного для любых скоростей) для сферических облаков с гауссовым распределением как функция скорости пробного облака.

Кривая с  $N_D = 10^3$  соответствует «малым» частицам. При малых скоростях, когда  $A_{II} \rightarrow \infty$ , можно считать, что коэффициент  $A_{II}$  приблизительно равен среднему и, следовательно, скезно рассеян, представителю на фиг. 6; убывание из-за взаимодействия  $I$  пренебрежимо мало. При больших скоростях убывание так велико,  $A_{II} \rightarrow 0$ . Индекс  $I$  и  $II$  обозначают направления относительной скорости пробного облака. Коэффициент  $A_{II}$  должен стремиться к нулю, когда  $v \rightarrow \infty$ , так как при  $v > 3v_T$  является «высшим».

заряда облака с помощью линейной интерполяции притяжения к ближайшему узлу сетки как при нахождении источника в уравнениях поля, так и при определении сил от полей,

### § 5. Эффект от пространственной сетки

Обычно при моделировании мы используем сетку в пространстве  $x$  и определяем значения поля только в узлах сетки. Однако положение частиц все еще изменяется непрерывно. Для связанных полей, определенных только на сетке, и характеристик частиц, которые являются непрерывными, используются различные алгоритмы. Важно знать, какие изменения могли бы произойти в физике из-за использования нефильтрационной сетки.

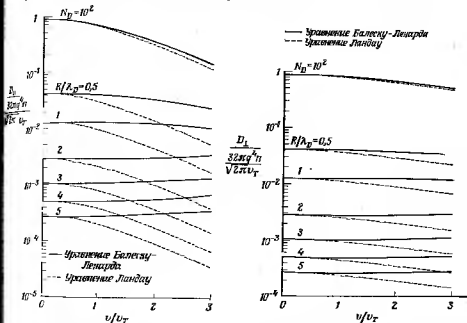
Рассмотрим сейчас ритм, который используется в методах «облака» в ячеистых (СIC) [10] и «частицы в ячеистых» (PIC) [11], причем простоты ограничимся фермионным случаем. В этих методах заряды можно считать как облака, чем элементы каждого могут находиться в нескольких ячейках; каждый элемент

вующих на частицы. Пусть уравнения для полей имеют вид

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho \rightarrow \varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1} = -4\pi\rho_i \Delta x^2,$$

$$E = -\nabla\varphi \rightarrow E_i = -\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x},$$

где  $E_i = E(i\Delta x)$  и т. д. Действующая на облако сила представляет собой сумму сил, действующих на все его элементарные заряды, связанные с несколькими узлами сетки.



Фиг. 9. Коэффициент диффузии  $D_{II}$  для облаков, представленных на фиг. 8.  $D_{II}$  быстро убывает, когда размер облака становится от нуля. Зависимость от скорости слабая.

Фиг. 10. Коэффициент диффузии  $D_I$  для облаков, представленных на фиг. 8. Сила приближается к нулю, но без заметной зависимости от скорости.

Введение сетки ставит новую проблему. Сила  $F(x_1, x_2)$ , с которой частица в точке  $x_1$  действует на частицу в точке  $x_2$ , может зависеть не только от расстояния между частицами, но и от места их размещения на сетке, а это нефизично. Нефизическую часть можно отчетливо представить себе, если проделать два простых эксперимента с облаками однородной плотности. Первый: закрепим заряд в точке  $x_1$  и изменим  $x_2$ ; при  $R = 0$  ( $NGP$ ) сила  $F$  изменяется скачками; при  $2R > 0$  (СIC, PIC) сила непрерывна ( $\partial F/\partial x_2$  изменяется скачками). Второе: сохраняем расстояние

между зарядами  $x \equiv x_2 - x_1$  постоянным, но изменим среднюю координату  $\bar{x} = (x_1 + x_2)/2$ ; при  $R = 0$  сила  $F$  опять изменится скачками, при  $R > 0$  сила  $F$  снова непрерывна и имеет гораздо меньшие флуктуации, чем при  $R = 0$ . Графики  $F$  легко построить или можно воспользоваться фиг. 3 и 4 из работы Барда и др. [12].

Эти эксперименты подсказывают, что силу удобно разложить на две части,  $F = \bar{F} + \delta F$ , где  $\bar{F}$  — усредненная часть, которая изменяется при перемещениях вдоль сетки,

$$\bar{F}(x_1, x_2) = \bar{F}(x_1 - x_2) = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Delta x} F\left(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}, \bar{x} + \frac{\Delta x}{2}\right) d\bar{x},$$

а  $\delta F$  — нефизическая сила, обусловленная сеткой.

Если эффекты от  $\delta F$  можно пренебречь, то систему можно анализировать, используя обобщенные ранее методы. Например, в дисперсионном соотношении нужно умножить  $(S^2)_{\text{ср}}$  на  $(\sin k\Delta x/k\Delta x)$ ; некоторые предварительные вычисления холодной плазмы подтвердили этот эффект [12]. Таким образом, одна из функций сетки — сгладить взаимодействие, что, по моему мнению, полезно.

Более подробное рассмотрение проблемы силы, обусловленной сеткой, показывает <sup>1)</sup>, что главным следствием силы  $\delta F$  является связь возмущений, обладающих волновым вектором  $k$ , с волнениями, волновой вектор которых отличается от  $k$  на величину  $2\pi/\Delta x$ . Эта связь несущественна, когда  $\lambda_D \gg \Delta x$ .

### § 6. Немного истории

В ранних численных экспериментах методы, используемые для связи характеристик частиц и сеточных характеристик, выдвинулись в основном из соображений простоты вычислений. Напрямую принималось, что плотность частиц в узле сетки равна плотности частиц в ячейке, поделенному по объему ячейки, содержащей узел сетки; так считалось в гидродинамическом методе «частиц в ячейке» (PIC) в работах Харлоу и Эванса [12], а также Хэла [13, 3]. Такое распределение по ближайшим узлам сетки (или приращенное к плазме, приводит к некоторому сглаживанию, например уничтожается сила между двумя зарядами противоположных знаков в одной и той же ячейке [4], но создает скачки плотности и силы, когда частица пересекает границу ячейки.

Следующий шаг заключался в том, что плотность частиц распределяется по ближайшим к частице узлам сетки путем линейной интерполяции, как в методе «облака в ячейке», PIC (Ван и Фасс [10] развили идею Дж. Байерса, высказанную при-

<sup>1)</sup> A. B. Langdon, неопубликованные результаты, 1969.

в 1964 г.), а усреднение скоростей по площади в методе PIC (см. [13], стр. 329) было приспособлено к вычислениям плотности плазмы и силы в методе Морза и Нильсона [4]. Такие интерполированные устройства сглаживают плотность и силы, присущие методу NGP, и привели к заметному уменьшению шума [10].

Были предприняты параллельные попытки сглаживать процесс без сетки, чтобы, например, уменьшить ошибку из-за скачка силы, когда сталкиваются частицы нулевого размера (ZSP). Одна из попыток была связана с предположением о том, что плотность заряда является однородной между координатами зарядов [5]; родственным решением было использование тонкого силового диполя, указывающего на то, что модельный заряд является цилиндрическим облаком [6]. Доусон и др. [4] снижали роль коротковолновых компонент разложения Фурье для поля. Их решения позволяли частицам относительно гладко проходить друг через друга.

Все эти шаги сыграли свою роль в эволюции концепции облаков и стимулировали развитие изложенной здесь физики облаков.

### § 7. Заключение

Мы рассмотрели основные свойства плазмы, состоящей из частиц конечного размера (облаков), чьи взаимодействия сглажены на малых расстояниях. Мы показали, что, когда размер облака  $R$  меньше дебаевской длины  $\lambda_D$ , продольные волны и дебаевское экранирование почти такие же, как и для «реальной» плазмы, но во время как столкновения (и коротковолновые флуктуации, которые рассмотрены в других работах) сильно уменьшаются. Этот вывод не является неожиданным и подтверждает тенденцию к использованию моделей, которые содержат такие искусственные сглаживающие взаимодействия. Когда размер облака  $R$  становится больше дебаевской длины  $\lambda_D$ , столкновения и флуктуации быстро исчезают, но свойства плазмы сильно меняются.

*Благодарности.* Наша группа в Беркли имела полезный контакт с Диком Доусоном и его группой в Принстоне, за что мы им очень благодарны. Мы также тесно сотрудничали с членами группы моделирования плазмы в Лоуренсовской радиационной лаборатории (Ливермор), особенно с Диком Байерсом, Х. Бэрном и Д. Фассом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Dawson J. M., Hsi C. C., Shanny R., Paper A1, Conf. Numerical Simulation Plasma, Los Alamos Scientific Lab., LASL Report LA-3690. См. реферат в Bull. Amer. Phys. Soc., 43, 1744 (1968).
2. Birdsell C. K., Langdon A. B., McKee C. F., Okuda H., Wong D., Paper D2, в трудах [1].
3. Harlow F. H., в книге Meth. Comp. Phys., vol. 3, New York, 1964, p. 349.

4. Hackney R. W., Phys. Fluids, 9, 1826 (1966).
5. Hess R., ASD Tech. Report 61-15, Aero. Syst. Div. AF Syst. Comm., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1961.
6. Mitrin T. G., Yu S. P., Journ. Appl. Phys., 34, 2576 (1963).
7. Fried B. D., Conte S. D., The Plasma Dispersion Function, New York, 1961.
8. Jackson J. D., Journ. Nucl. Energy (Part C), 1, 474 (1960).
9. Morse R. M., Nielson C. W., Phys. Rev. Lett., 23, 19, 1087 (1969).
10. Birdsell C. K., Fuss D., Journ. Comput. Phys., 3, 494 (1969).
11. Morse R. L., Nielson C. W., Paper A4, в трудах [1].
12. Harlow F. H., Evans W. M., Los Alamos Scientific Lab. Report LA-1957.
13. Harlow F. H., Journ. Assoc. Comput. Mach., 3-4, 137 (1956).
14. Harlow F. H., Meth. Comput. Phys., 3, 319, New York, 1964.

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЯ

Дж. Байер\*, Дж. Киллиан\*\*

### § 1. Введение

Конечно-разностные методы, пригодные для математических моделей плазмы, в которой преобладают столкновения, обсуждаются в других главах настоящего тома. В частности, подробно обсуждается решение уравнения Больцмана — Фоккера — Плана и уравнений магнитной гидродинамики. Однако большинство теоретических работ последнего времени, особенно в исследовании по управляемому синтезу, основывалось на приближении бесстолкновительной плазмы. В настоящей главе мы рассмотрим конечно-разностные методы, пригодные для решения некоторых таких задач.

В большей части работ по численному решению уравнения Власова используется представление Лагранжа, т. е. интегрируются траектории большого числа частиц (плетов, стержней, облаков и т. д.) и по этим распределениям частиц вычисляются плотности зарядов и токов. В настоящей главе мы будем использовать айлеров подход для уравнения Власова в фазовом пространстве. Будут даны методы прямого решения уравнений для функций распределения. Вначале рассматриваются некоторые методы и примеры для двумерного фазового пространства. Затем подробно обсуждаются проблемы в четырехмерном пространстве.

В § 3 мы обсудим некоторые задачи, используя уравнения движения в дрейфовом приближении. Здесь мы снова используем айлерово представление для изучаемых моделей. Первым примером будет линейная модель, используемая при изучении устойчивости плазмы в ловушках с магнитными пробками. Обычная процедура решения таких задач состоит в том, чтобы получить дисперсионное уравнение и затем попытаться решить его. Мы же в этом примере будем исходить из задачи с начальными условиями для возмущений электрического поля и плотности ларморовских центров частиц. Описан конечно-разностный метод, с помощью которого решается сформулированная задача с начальными условиями.

\* Jack A. Byers, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California.

\*\* John Killen, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California and Department of Applied Science, University of California, Davis, California.

4. Hockney R. W., Phys. Fluids, 9, 1826 (1966).
5. Hess R., ASD Tech. Report 64-15, Aero. Syst. Div. AF Syst. Comm., Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1964.
6. Mikhra T. G., Yu S. P., Journ. Appl. Phys., 34, 2976 (1963).
7. Fried B. D., Conte S. D., The Plasma Dispersion Function, New York, 1961.
8. Jackson J. D., Journ. Nucl. Energy (Part C), 1, 174 (1960).
9. Morse R. M., Nielson C. W., Phys. Rev. Lett., 3, 494 (1963).
10. Birdall C. K., Fuss D., Journ. Comput. Phys., 3, 494 (1963).
11. Morse R. L., Nielson C. W., Paper A4, в трудах [4].
12. Harlow F. H., Evans W. M., Los Alamos Scientific Lab. Report 1, 1957.
13. Harlow F. H., Journ. Assoc. Comput. Mach., 3-4, 437 (1956).
14. Harlow F. H., Meth. Comput. Phys., 3, 319, New York, 1964.

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ПЛАЗМЫ БЕЗ СТОЛКНОВЕНИЙ

Дж. Байерс\*, Дж. Киллин\*\*

### § 1. Введение

Конечно-разностные методы, пригодные для математических моделей плазмы, в которой преобладают столкновения, обсуждаются в других главах настоящего тома. В частности, подробно обсуждается решение уравнения Больцмана — Фоккера — Планка и уравнений магнитной гидродинамики. Однако большинство теоретических работ последнего времени, особенно в исследованиях по управляемому синтезу, основывалось на приближении бесстолкновительной плазмы. В настоящей главе мы рассмотрим конечно-разностные методы, пригодные для решения некоторых таких задач.

В большей части работ по численному решению уравнения Власова используется представление Лагранжа, т. е. интегрируются траектории большого числа частиц (листов, стержней, облаков и т. д.) и по этим распределениям частиц вычисляются плотности зарядов и токов. В настоящей главе мы будем использовать эйлеров подход для уравнения Власова в фазовом пространстве. Будут даны методы прямого решения уравнений для функций распределения. Вначале рассматриваются некоторые методы и примеры для двумерного фазового пространства. Затем подробно обсуждаются проблемы в четырехмерном пространстве.

В § 3 мы обсудим некоторые задачи, используя уравнения движения в дрейфовом приближении. Здесь мы снова используем эйлерово представление для изучаемых моделей. Первым примером будет линейная модель, используемая при изучении устойчивости плазмы в ловушках с магнитными пробками. Обычная процедура решения таких задач состоит в том, чтобы получить дисперсионное уравнение и затем попытаться решить его. Мы же в этом примере будем исходить из задачи с начальными условиями для возмущенной электрической поля и плотности ларморовских центров частиц. Описан конечно-разностный метод, с помощью которого решается сформулированная задача с начальными условиями.

\* Jack A. Byers, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California.

\*\* Joan Killen, Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California and Department of Applied Science, University of California, Davis, California.

Затем в порядке изучения неустойчивостей плазмы с большими амплитудами колебаний мы рассмотрим двумерную нелинейную задачу. При этом используется двухжидкостная модель и решаются уравнения в эйлеровой форме. Важной частью этого параграфа является обзор различных разностных аппроксимаций графа явлений обзор различных разностных аппроксимаций производных по времени в уравнениях для плотностей частиц.

## § 2. Численное решение уравнений Власова

### 1. Одномерные модели

#### а. Введение

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + v \frac{\partial f_e}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial f_e}{\partial v} &= 0, \\ \frac{\partial f_i}{\partial t} + v \frac{\partial f_i}{\partial x} + M \frac{\partial f_i}{\partial v} &= 0, \\ \frac{dE}{dx} &= 4\pi e \int_{-\infty}^{+\infty} (f_i - f_e) dv, \end{aligned}$$

где  $f_e(x, v, t)$  и  $f_i(x, v, t)$  — электронная и ионная функции распределения,  $M$  и  $m$  — массы ионов и электронов,  $+e$  ( $Z = 1$ ) — их заряды и  $E(x, t)$  — напряженность электрического поля.

С точки зрения численного решения этой системе удивительно, насколько больше внимания, чем любой другой в физике и технике. Это обусловлено ее ясным, простым видом и важностью в фундаментальных проблемах физики плазмы. Такое приращение используется при изучении неустойчивостей, например джоулевой неустойчивости, в теории бесстолкновительных волн, затухания Ландау и в других задачах. Его называем самым важным уравнением Власова, что несколько длинно, но, что оно нелинейно, так как  $E$  зависит от  $f_e$  и  $f_i$ . Однако, успешный был затрачено на аналитическое решение линейного уравнения Власова.

Мы будем записывать уравнение (1) или (2) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + F \frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Уравнение (4) можно переписать так:

$$\frac{Df}{Dt} = 0,$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial v}.$$

Мы будем ссылаться на уравнения (4) и (5) как на эйлерову и лагранжиану формы уравнения. Уравнение (5) означает, что  $f$  остается постоянной вдоль траекторий, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dt} = F. \quad (7)$$

т. е.  $f_j$  постоянна вдоль кривых  $x_j(t)$ ,  $v_j(t)$ , где  $x_j(t)$  и  $v_j(t)$  — решения уравнений (6) и (7) при  $x(0) = x_j$ ,  $v(0) = v_j$ . Различные модели «слотов» основываются на уравнениях (5)–(7). Другой метод, который также основан на уравнениях (5)–(7), называется моделью «сводного мешка». В этом методе используется кусочно-постоянная функция распределения, и границы областей, в которых функция  $f$  постоянна, вычисляются как функции времени, интегрированием уравнений (6) и (7) для конечной сетки граничных точек. С помощью такой системы дискретных точек на каждом шаге по времени строится новая граничная кривая.

Третий метод дает решение уравнения Власова в форме (4) и основан на двойном разложении  $f(x, v, t)$  по ортогональным функциям от  $x$  и  $v$ . Коэффициенты в разложении являются функциями времени и удовлетворяют бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Ряды обрываются, начиная с некоторых номеров, и помученная конечная система уравнений решается численно.

Три названных метода детально обсуждаются в других главах этой книги.

Четвертый метод представляет собой решение уравнения в эйлеровой форме непосредственно методом конечных разностей. Уравнения (1) и (2) можно записать в виде системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (8)$$

где

$$f = \begin{bmatrix} f_e \\ f_i \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} F_e & 0 \\ 0 & F_i \end{bmatrix},$$

причем  $F_e = -(em)E$  и  $F_i = (eM)E$ .

Уравнение (8) является гиперболической системой, записанной в виде системы уравнений переноса. Мы будем также писать



ее в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial v} = 0,$$

где

$$f = \begin{bmatrix} f_e \\ f_i \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} v f_e \\ v f_i \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} F_e f_e \\ F_i f_i \end{bmatrix}.$$

Уравнение (9) является гиперболической системой, записанной в консервативной форме. В следующем пункте обсуждаются различные методы для гиперболических систем обоих видов.

### 6. Разностные методы для гиперболических систем

Гиперболическую систему можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + V = 0,$$

где  $U$  и  $V$  —  $m$ -мерные вектор-столбцы,  $A$  —  $m \times m$ -матрица.

Система (10) называется гиперболической, если матрица  $A$  имеет только вещественные собственные значения и  $m$  линейно независимых собственных векторов. Так как нас интересует именно этот случай, мы будем использовать бо-  
лее простую систему

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим конечно-разностную сетку с узлами  $x_j = j\Delta x$ ,  $t_n = n\Delta t$ , где  $j$  и  $n$  — целые числа и  $U_j^n = U(x_j, t_n)$ . Простая разностная аппроксимация уравнения (11)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_j^n (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

неустойчива [1].

Простой равнодвондностью ее является система

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A_j^n (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n),$$

которая уже устойчива. Условие устойчивости имеет вид  $|a\Delta t/\Delta x| < 1$  для всех собственных значений  $a$  матрицы  $A$ . (Обусловленные коэффициенты постоянны, так что для наших нелинейных уравнений они должны рассматриваться как локальные, которые проверяются в ходе вычислений.) Несколько лу-

называемая разностная схема «вверх по течению — вниз по течению» [1]. Для скалярного уравнения

$$u_t + a \frac{du}{dx} = 0 \quad (13)$$

эта разностная схема имеет вид

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a_j^n \Delta t}{\Delta x} \begin{cases} u_{j+1}^n - u_j^n, & \text{если } a_j^n < 0, \\ u_j^n - u_{j-1}^n, & \text{если } a_j^n > 0. \end{cases} \quad (14)$$

Схема устойчива, если  $|a\Delta t/\Delta x| < 1$ . Повышенный порядок точности обеспечивает схема «с перешагиванием» [2], разностные уравнения которой имеют вид

$$U_j^{n+1} = U_j^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} A_j^n (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n). \quad (15)$$

Схема устойчива при условии  $|a\Delta t/\Delta x| < 1$ , но она невыгодна из-за трехкратности разностных уравнений. Другая схема, которая также имеет второй порядок точности, но использует только два временных слоя, основывается на разложении

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)_j^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_j^n. \quad (16)$$

Если матрица  $A$  постоянна, то мы получаем разностное уравнение

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left( \frac{A\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n). \quad (17)$$

Если матрица  $A$  не постоянна, то уравнение (17) становится гораздо более сложным. Условие устойчивости имеет вид  $|a\Delta t/\Delta x| < 1$ .

В некоторых случаях можно написать систему (11) в консервативной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

где  $F$  есть  $m$ -мерный вектор-столбец. Разностную схему второго порядка точности для системы (18) можно записать в особенно простой форме, которая называется двухшаговой схемой Лакса — Вендроффа. Она легко обобщается на случай двух измерений и имеет то преимущество, что сохраняет величину  $U$ . В качестве первого шага в промежуточных узлах сетки используется урав-

<sup>1)</sup> В оригинале: the upstream-downstream difference scheme.— Прим. перевод.

<sup>2)</sup> В оригинале: the leapfrog difference scheme.— Прим. перевод.

ление (12), т. е.

$$U_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (U_{j+1}^n + U_j^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{j+1}^n - F_j^n). \quad (1)$$

На втором шаге используется схема с переносом

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^{n+1/2} - F_{j-1/2}^{n+1/2}). \quad (2)$$

Система (19а), (19б) сводится к уравнению (17), если  $\partial F/\partial x = A(\partial U/\partial x)$  и матрица  $A$  постоянна.

Разностные схемы, определяемые уравнениями (14) и (15) непосредственно обобщаются на большее число измерений. Схемы же (17) не элементарно и может привести к неустойчивому методу, если не выполнить его корректно. Если добавить члены, аппроксимирующие производные по другим направлениям, как в уравнении (17), то получится неустойчивая схема. Однако если применить технику «расщепления», то будет устойчива, т. е. для двумерных уравнений мы вычленим перенос в одном направлении, а затем, используя результаты предыдущего цикла, вычленим перенос в другом направлении. Подробности будут описаны ниже, в п. 2.

## в. Прямые методы

Уравнение (9) является гиперболической системой в канонической форме, и его удобно решать двухшаговым методом Лакса-Вендроффа для двух измерений. Пусть  $x_i = i\Delta x$ ,  $v_k = k\Delta v$  и  $\tau = n\Delta t$ . Единичной ячейкой конечной разностной сетки будем считать ячейку со сторонами  $2\Delta x$ ,  $2\Delta v$  и  $2\Delta t$ . Промежуточные величины будем вычислять по формулам

$$f_{i,k}^{n+1/2} = \frac{1}{4} (U_{i+1,k}^n + f_{i-1,k}^n - f_{i,k+1}^n + f_{i,k-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (G_{i+1,k}^n - G_{i-1,k}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta v} (H_{i,k+1}^n - H_{i,k-1}^n),$$

затем окончательные значения вычислим из соотношений

$$f_{i,k}^{n+2} = f_{i,k}^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (G_{i+1,k}^{n+1/2} - G_{i-1,k}^{n+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta v} (H_{i,k+1}^{n+1/2} - H_{i,k-1}^{n+1/2}).$$

Электрическое поле можно получить непосредственным решением уравнения (3). Для определенных граничных условий необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\rho,$$

где  $E = -\partial\varphi/\partial x$  и  $\rho$  есть правая часть уравнения (3). Аппроксимация уравнения (22) имеет вид

$$\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n = (\Delta x)^2 \rho_i^n.$$

Написанные выше разностные уравнения использовались в программе Дж. Кларка, предназначенной для изучения проблем ограниченной плазмы. Математической моделью плазмы служили уравнения (1)–(3) с соответствующими граничными условиями. Результаты будут опубликованы как часть его диссертации. Программа продемонстрировала превосходные консервативные свойства в таких задачах.

Другая одномерная модель реализована в программе RESIST [2, 3], которая предназначалась для изучения эффекта сопротивления захваченного электронного слоя в экспериментах на установке «Астро». В качестве математической модели плазмы использовалось уравнение Власова для функции распределения электронов в фазовом пространстве  $(z, v_z)$ . Вычислялись также самосогласованные электрическое и магнитное поля, которые затем подставлялись в уравнение Власова. Для решения уравнения Власова применялась обобщенная на двумерный случай разностная схема «вверх по течению» — «вверх по течению», представленная формулой (14).

Еще одна одномерная модель реализована в программе MINILAYER. Это упрощенный вариант программы LAYER [4]. Программа MINILAYER рассчитана на решение уравнения Власова для функции распределения электронов в фазовом пространстве  $(z, v_z)$ , в то время как программа LAYER предназначена для четырехмерного фазового пространства. При этом использовалась схема второго порядка точности типа уравнений (17), обобщенная на случай двух измерений с применением техники расщепления. Мы обсудим программу LAYER в следующем пункте.

Келогом [5] при изучении двухпоточковой неустойчивости были решены уравнения (1)–(3) с применением разностной схемы с переносом.

## 2. Двумерная модель

### а. Введение

Существуют программы для решения двумерного уравнения Власова, т. е. в четырехмерном фазовом пространстве. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + F_x \frac{\partial f}{\partial u} + F_y \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (23)$$

для каждого сорта частиц и уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\rho. \quad (24)$$

Можно также написать

$$\frac{Df}{Dt} = 0,$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + F_x \frac{\partial}{\partial u} + F_y \frac{\partial}{\partial v}.$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{du}{dt} = F_x, \quad \frac{dv}{dt} = F_y.$$

Обобщение модели листов на случай двух измерений об-  
павывают моделью «стержащей». В некоторых таких програ-  
в выражении для сил включается не зависящее от времени  
нитное поле. Важной особенностью этих программ является  
рый метод решения уравнения Пуассона.

Уравнение (23) можно решать также конечно-разностны-  
тодами. Двухшаговый метод типа уравнений (20) и (24) м-  
обобщить на четыре измерения. Такая четырехмерная з-  
возникает при вычислениях самосогласованного магнитного  
установки «Астро», которая была решена конечно-разност-  
методами [4].

В экспериментах по управляемому синтезу на установке  
рон» (Ивермор) релятивистские электроны инжектируются  
линдрическую область с внешним магнитным полем. В резу-  
те формируется E-слой (цилиндрический слой электронов),  
свое поле которого превышает внешнее поле. Результиру-  
конфигурация предполагается аксиально-симметричной без  
мультипольной компоненты магнитного поля.

Математической моделью, описывающей формирование  
тронного слоя и собственного поля, служит уравнение Вль-  
которое интегрируется по времени совместно с уравнениями  
векла. При этом компоненты поля  $B_r$  и  $B_z$  могут быть зам-  
с помощью функции потока  $\psi(r, z, t)$ . Канонический углово-  
мент  $p_\psi$  является интегралом движения, и мы предполагаем  
все электроны инжектируются с фиксированным значением  
Таким образом, необходимо рассматривать функцию распр-  
ния электронов  $f$ , определенную в четырехмерном фазовом  
странстве  $(r, z, p_r, p_z)$ . В настоящем обсуждении мы считаем  
система электрически нейтральной в каждой точке. Распреде-  
лений явно не вычисляется, но предполагается, что их присум-  
нейтрализует заряд слоя.

В настоящее время М. Бреггинджер разрабатывает новый  
ант программы, в котором снимается предположение о нейтр-  
ности. В этом варианте электрический потенциал  $\psi(r, z, t)$   
вычисляется конечно-разностными методами.

### б. Математическая модель формирования слоя

В обсуждаемой модели существуют случайные радиальные  
и аксиальные токи, но они малы по сравнению с azimuthальными  
током. В настоящем обсуждении мы пренебрегаем также радиаль-  
ной и azimuthальной компонентами магнитного векторного потенци-  
ала. Введение  $A_z(r, z, t)$  в модель предусматривается в новом  
варианте программы LAYER.

Будем описывать магнитное поле одной компонентой  $A_\theta(r, z, t)$   
векторного потенциала. Уравнение для  $A_\theta$  имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \right] = 4\pi j_\theta, \quad (27)$$

и мы имеем

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta), \quad E_\theta = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_\theta}{\partial t}. \quad (28)$$

Канонический угловой момент можно записать в виде

$$p_\psi = m_0 \gamma v_\theta + \frac{e}{c} r A_\theta,$$

где  $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ . Удобно ввести функцию

$$\psi = \frac{\gamma}{c} r v_\theta, \quad (29)$$

так что

$$\psi = \frac{p_\psi}{m_0 c} - \frac{e}{m_0 c^2} r A_\theta, \quad (30)$$

и так как мы предполагаем, что все электроны имеют фиксирован-  
ный момент  $p_\psi$ , то можно использовать  $\psi$  вместо  $A_\theta$  для описания  
поля. Из соотношения (27), (28) и (30) следует

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = -\frac{4\pi e}{m_0 c^2} r j_\theta, \quad (31)$$

$$B_r = -\frac{m_0 c^2}{e} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad B_z = -\frac{m_0 c^2}{e} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (32)$$

Введем безразмерную скорость  $u$  при помощи соотношения

$$u = \frac{\gamma}{c} v. \quad (33)$$

Тогда выражение для  $\psi$  приобретает вид

$$\psi = (1 + u^2 + u_z^2 + u_r^2)^{1/2},$$

и, используя уравнение (29) в форме  $\psi = \gamma u$ , мы получаем

$$\gamma = \left(1 + u^2 + u_z^2 + \frac{\psi^2}{r^2}\right)^{1/2}. \quad (34)$$

Пусть  $f(r, z, u_r, u_z, t)$  — функция распределения электронов в фазовом пространстве, так что  $f(r, z, u_r, u_z, t) dr dz du_r du_z$  — число электронов в элементе  $dr dz du_r du_z$  в точке  $(r, z, u_r, u_z)$  в момент времени  $t$ . Функция  $f$  имеет размерность числа электронов на квадратный сантиметр. Уравнение для функции  $f$  имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_r} \frac{du_r}{dt} + \frac{\partial f}{\partial u_z} \frac{du_z}{dt} = S,$$

где  $S$  — мощность источника электронов, инжектируемых в фазовое пространство. Из соотношения (33) следует, что

$$\frac{dr}{dt} = \frac{c}{\gamma} u_r \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c}{\gamma} u_z.$$

Мы определяем  $du_r/dt$  и  $du_z/dt$  с помощью релятивистских уравнений движения электронов. Радиальное и аксиальное уравнения имеют вид

$$m_0 (\ddot{r} - \dot{r}^2 - \dot{\theta}^2) = -\frac{e}{c} r \dot{\theta} B_z,$$

$$m_0 (\ddot{z} - \dot{z}^2) = -\frac{e}{c} r \dot{\theta} B_r.$$

Из уравнений (35) мы имеем

$$\dot{r} = \frac{c}{\gamma} u_r - \frac{c}{\gamma^2} \dot{\gamma} u_r, \quad \dot{z} = \frac{c}{\gamma} u_z - \frac{c}{\gamma^2} \dot{\gamma} u_z$$

и, учитывая соотношение (23) и (32), получаем

$$\frac{du_r}{dt} = -\frac{c}{\gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi^2}{2r^2} \right), \quad \frac{du_z}{dt} = -\frac{c}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\psi^2}{2r^2} \right).$$

Уравнение для  $f$  можно теперь записать в виде

$$\frac{\gamma}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + u_r \frac{\partial f}{\partial r} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\psi^2}{2r^2} \right) \frac{\partial f}{\partial u_r} - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\psi^2}{2r^2} \right) \frac{\partial f}{\partial u_z} = S \frac{\gamma}{c}.$$

Плотность azimuthального тока  $j_\theta$  дается формулой

$$j_\theta = \frac{e}{c} \frac{1}{2\pi r} \int \int v_\theta f du_r du_z.$$

Учитывая соотношение (29), ее можно записать так:

$$j_\theta = -\frac{e}{2\pi} \frac{\psi}{r^2} \int \int \frac{f}{\gamma} du_r du_z.$$

При этом уравнение (34) приобретает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = -r_e \frac{2\psi}{r} \int \int \frac{f}{\gamma} du_r du_z,$$

где  $r_e = e^2/m_0 c^2$ . Уравнения (34), (37) и (39) образуют самостоятельную систему уравнений, которая описывает формирование  $E$ -слоя.

### в. Безразмерные уравнения, граничные условия

При выполнении такого рода расчетов естественно ввести подходящую систему безразмерных переменных. Вместо функции  $\psi$ , определяемой равенством (30), введем переменную  $\bar{\mu}$ , которую определим следующим образом:  $\bar{\mu} = \psi/(r_0/m_0 c)$ . Для оценки  $r_0$  рассмотрим равновесную орбиту в вакуумном поле. Будем считать, что в средней плоскости  $z=0$  внешнее граничное пробочного поля пренебрежимо мало, т. е. поле в вакууме при  $z=0$  определяется соотношением  $A_\theta(r, 0) = 1/2 B_0 r$ , где  $B_0$  — константа, зависящая от энергии ивекции, радиуса и угла наклона. Для равновесных орбит при  $z=0$  из радиального уравнения движения мы имеем

$$m_0 \gamma_0 \dot{\theta}^2 = -\frac{e}{c} r_0 \dot{\theta} B_0,$$

где  $r_0$  — радиус равновесной орбиты при  $z=0$ . Следовательно,

$$r_0 = -\frac{e}{c} B_0 r_0^2 + \frac{1}{2} \frac{e}{c} B_0 r_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{e}{c} B_0 r_0^2,$$

и мы получаем

$$\bar{\mu} = -\frac{[2m_0 c^2]}{e B_0 r_0^2} \psi. \quad (40)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$R = \frac{r}{r_0}, \quad Z = \frac{z}{r_0}, \quad \tau = \frac{ct}{r_0},$$

$$\bar{a}_\theta = \frac{A_\theta}{B_0 r_0}, \quad \bar{b}_r = \frac{B_r}{B_0}, \quad \bar{b}_z = \frac{B_z}{B_0}.$$

С учетом этих обозначений из соотношений (30), (32) и (40) имеем

$$\bar{\mu} = 1 + 2R\bar{a}_\theta, \quad \bar{v}_r = -\frac{1}{2R} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial Z}, \quad \bar{v}_z = \frac{1}{2R} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial R}.$$

Удобно положить  $\bar{\mu} = \mu_c + \mu$ , где  $\mu_c$  характеризует поле в вакууме, которое создается внешними катушками, а  $\mu$  — вклад электронного слоя. Функция  $\mu_c$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \mu_c}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \mu_c}{\partial Z^2} - R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \mu_c}{\partial R} \right) = 0.$$

Вместо электронного функцим распределения введем безразмерную величину  $\rho$ :

$$\rho = r_e v f. \quad (41)$$

Введем еще параметр  $C_1$ :

$$C_1 = -\frac{e B_0 r_0}{2 m_0 c^2} = -(2.93 \cdot 10^{-4}) B_0 r_0$$

и определим функцию  $P(R, Z, \tau)$ :

$$P = \frac{1}{2} C_1 \frac{\mu^2}{R^2}.$$

Это потенциал движения электронов, и уравнения движения в этих переменных принимают вид

$$\gamma \frac{du_r}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial R}, \quad \gamma \frac{du_z}{d\tau} = -\frac{\partial P}{\partial Z}.$$

Полную систему уравнений можно записать теперь в безразмерной форме. Уравнение (39) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial Z^2} - R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial u_r}{\partial R} \right) = -R \iint \frac{\rho}{\gamma} du_r du_z.$$

Уравнение (37) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{u_r}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial R} + \frac{u_z}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial Z} - \frac{P_r}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial u_r} - \frac{P_z}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial u_z} = \sigma,$$

где

$$\sigma = r_{e0}^2 \frac{S}{c} = (2,82 \cdot 10^{-13}) r_0^2 \frac{S}{c},$$

$$P_r = \frac{\partial P}{\partial R} = C_1^2 \left[ \frac{2}{R} \bar{\mu} \bar{b}_z - \frac{1}{R^2} \bar{\mu}^2 \right],$$

$$P_z = \frac{\partial P}{\partial Z} = C_1^2 \left[ -\frac{2}{R} \bar{\mu} \bar{b}_r \right],$$

$$\bar{b}_r = b_{rc} - \frac{1}{2R} \frac{\partial \mu}{\partial Z},$$

$$\bar{b}_z = b_{zc} + \frac{1}{2R} \frac{\partial \mu}{\partial R},$$

$$\gamma = (1 + u_r^2 + u_z^2 + 2P)^{1/2}.$$

Мы хотим решить задачу с начальными условиями, определяемую уравнениями (43) и (44) с учетом обозначений (45). При  $t = 0$  мы имеем

$$\bar{\mu} = \mu_c = 1 + 2R a_{0c}.$$

Следовательно, начальное условие для уравнения (43) имеет

$$\mu(R, Z, 0) = 0.$$

Уравнение решается в области

$$0 \leq R \leq R_{\max}, \quad -I^* \leq Z \leq I^*,$$

где  $I^* = U r_0$  и  $R_{\max}$  выбирается достаточно большим, так как влияние электронного слоя было пренебрежимо малым. Граничные условия ставятся для проводящих стенок и имеют вид

$$\mu(R_{\max}, Z, \tau) = 0, \quad \mu(R, -I^*, \tau) = 0, \quad \mu(R, I^*, \tau) = 0.$$

Начальным условием для уравнения (44) служит равенство

$$\rho(R, Z, u_r, u_z, 0) = 0.$$

Уравнение решается в области

$$R_1 \leq R \leq R_2, \quad -I^* \leq Z \leq I^*,$$

$$-(u_r)_{\max} \leq u_r \leq (u_r)_{\max}, \quad -(u_z)_{\max} \leq u_z \leq (u_z)_{\max},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы внутренней и внешней материальных стенок цилиндрической области, в которой формируется электронный слой. Область скоростей, т. е.  $(u_r)_{\max}$  и  $(u_z)_{\max}$ , берется достаточно большой, чтобы уменьшалось все, кроме больших скоростей в «хвосте» функции распределения, который мал, так как электроны со слишком большими скоростями будут покидать систему.

Граничные условия для уравнения (44) в пространстве скоростей имеют вид

$$\rho = 0 \quad \text{при} \quad u_z > (u_z)_{\max}, \quad u_z < -(u_z)_{\max},$$

$$u_r > (u_r)_{\max} \quad \text{и} \quad u_r < -(u_r)_{\max}.$$

В геометрическом пространстве используются следующие условия:

При  $z = I^*$  для  $u_z < 0$  полагаем  $\rho = 0$  при всех  $R$ , за исключением точки нижнего края; для  $u_z > 0$  мы должны вычислить  $\rho$ , а также поток частиц, теряемых при  $Z = I^*$ .

При  $Z = -I^*$  для  $u_z > 0$  полагаем  $\rho = 0$  при всех  $R$ ; для  $u_z < 0$  мы должны вычислить  $\rho$  и поток частиц, теряемых при  $Z = -I^*$ .

При  $R = R_2$  для  $u_r < 0$  полагаем  $\rho = 0$  при всех  $Z$ ; для  $u_r > 0$  мы должны вычислить  $\rho$  и поток частиц, теряемых при  $R = R_2$ .

При  $R = R_1$  для  $u_r > 0$  полагаем  $\rho = 0$  для всех  $Z$ ; для  $u_r < 0$  мы должны вычислить  $\rho$  и поток частиц, теряемых при  $R = R_1$ .

#### г. Конечно-разностные методы

Разделим фазовое пространство конечно-разностной сеткой с узлами  $Z_i = imh$ ,  $R_j = jh$ ,  $(u_z)_k = kh^*$ ,  $(u_r)_l = lh^*$ , где  $i, j, k, l, m$  — целые числа. Мы имеем

$$-I \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J, \quad -K \leq k \leq K, \quad -L \leq l \leq L,$$

где

$$Imh = I^*, \quad Jh = R_{\max}, \quad Kh^* = (u_z)_{\max}, \quad Lh^* = (u_r)_{\max}.$$

Пусть  $\tau_n = n\Delta t$  и  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , введем также обозначения

$$\mu_{ij}^n = \mu(R_j, Z_i, \tau_n) \quad \text{и} \quad \rho_{ijk}^n = \rho(R_j, Z_i, u_{rl}, u_{zk}, \tau_n).$$

Простейшим методом решения уравнения (43) является разностная схема. По соображениям устойчивости удобно использовать половину шага по времени для этого уравнения.

Мы имеем

$$\frac{\mu_{i,j}^{n+1/2} - 2\mu_{i,j}^n + \mu_{i,j}^{n-1/2}}{(\Delta t/2)^2} = \frac{\mu_{i+1,j}^n - 2\mu_{i,j}^n + \mu_{i-1,j}^n}{m^2 \Delta x^2} + \bar{I}_{i,j}^n + \\ + \frac{2j}{h^2} \left[ \frac{\mu_{i,j+1}^n - \mu_{i,j}^n}{2j-1} - \frac{\mu_{i,j}^n - \mu_{i,j-1}^n}{2j+1} \right], \\ \frac{\mu_{i,j}^{n+1} - 2\mu_{i,j}^{n+1/2} + \mu_{i,j}^n}{(\Delta t/2)^2} = \frac{\mu_{i+1,j}^{n+1/2} - 2\mu_{i,j}^{n+1/2} + \mu_{i-1,j}^{n+1/2}}{m^2 h^2} + \bar{I}_{i,j}^{n+1/2} + \\ + \frac{2j}{h^2} \left[ \frac{\mu_{i,j+1}^{n+1/2} - \mu_{i,j}^{n+1/2}}{2j-1} - \frac{\mu_{i,j}^{n+1/2} - \mu_{i,j-1}^{n+1/2}}{2j+1} \right],$$

где

$$\bar{I}_{i,j}^n = -2 \frac{\mu_{i,j}^n}{jh} (hk^*)^2 \sum_{h=-K}^K \sum_{l=-L}^L \frac{\rho_{i,j,h,l}^n}{\mu_{i,j}^n \nu_{i,j,h,l}^n},$$

$$\nu_{i,j,h,l}^n = [1 + (kh^*)^2 + (lh^*)^2 + C_1^2(jh)^2 (\mu_{i,j}^n)^2]^{1/2}.$$

Выражение для  $\bar{I}_{i,j}^{n+1/2}$  содержит аналогичную сумму по  $h$  и множитель  $\mu_{i,j}^{n+1/2}$  вместо  $\mu_{i,j}^n$ .

В другом варианте программы для решения уравнения использовался пятый метод переменных направлений (4). Этот метод требует много времени при решении уравнений поля, не содержащих производной по времени. Подробное применение метода переменных направлений к обсуждаемой проблеме изложено в работе Килькина и Ромельд [14].

В конце полного шага по времени магнитное поле вычислено во всех узлах области  $(r, z)$ . Из равенств (48) и (49) следует

$$(\bar{b}_r)_i, j = (b_r)_{i,j} - (4j/m^2)^{-1} [\mu_{i+1,j}^n - \mu_{i-1,j}^n],$$

$$(\bar{b}_z)_i, j = (b_z)_{i,j} + (4jh^2)^{-1} [\mu_{i,j+1}^n - \mu_{i,j-1}^n].$$

Выражения  $b_{rc}$  и  $b_{zc}$  для поля в вакууме считаются известными и будут обсуждаться позже. Звездчатые выше компоненты  $\bar{b}_r$  и  $\bar{b}_z$  используются при решении уравнения (44); этого, если выводится на печать и графопостроитель, не хватает (46) и (47) следует

$$(P_r)_i, j = C_1^2 [2(jh)^{-1} \mu_{i,j}^n; (\bar{b}_z)_i, j - (jh)^{-2} (\mu_{i,j}^n)^2],$$

$$(P_z)_i, j = -C_1^2 [2(jh)^{-1} \mu_{i,j}^n; (\bar{b}_r)_i, j],$$

$$\text{где } \bar{\mu}_{i,j}^n = (\mu_z)_{i,j} + \mu_{i,j}^n.$$

В новой программе конечно-разностным методом вычисляются также электрический потенциал  $\phi(r, z, t)$  и аксиальная компонента векторного потенциала  $A_z(r, z, t)$ . В явной записи разностные уравнения для этих величин сходны с уравнениями (54). Существует вариант программы, в котором решаются три уравнения для полей методом переменных направлений.

Рассмотрим теперь конечно-разностные методы решения уравнения (44). Оно является уравнением с частными производными гиперболического типа, и, следовательно, подходящими будут методы, обсуждавшиеся в п. 1, 6. Схема «вниз по течению» — вверх по течению, определенная формулой (44), может быть обобщена на случай четырех измерений, и условия устойчивости принимают вид

$$\left| \frac{kh^* \Delta x}{\pi \nu h} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{lh^* \Delta x}{\nu h} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{P_r \Delta x}{\gamma h^*} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{P_z \Delta x}{\gamma h^*} \right| \leq 1. \quad (58)$$

В первом варианте программы LAYER использовалась эта схема и явная аппроксимация для уравнения (43). К сожалению, такая схема вызывает искусственную диффузию, которая через короткое время портит результат.

Рассмотрим централизованную по пространству и времени трехслойную аппроксимацию типа «с перешагиванием», определенную формулой (15). Обобщение на несколько измерений выполняется непосредственно и приводит к условиям устойчивости схемы вида (58). Такая схема использовалась во втором варианте программы LAYER. Вычисления, выполненные этим методом, дали довольно хорошие результаты, однако на грубой сетке, применявшейся при решении задачи, они были недостаточно точны для вычислений на большом промежутке времени. Кроме того, метод оказался невыгодным из-за трехслойности формулы, и когда шаг по времени приходилось уменьшать по соображениям устойчивости, возникало много затруднений.

В третьем варианте программы LAYER использовалась трехслойная аппроксимация переносного члена, аналогичная формуле (17). Схема имеет второй порядок точности и обладает тем преимуществом, что является двухслойной. Обобщение на несколько измерений нетривиально и может привести к неустойчивому методу, если не выполнить его корректно [16]. Аппроксимацию (17) для одномерного уравнения можно записать в матричной форме:  $\rho^{n+1} = (I + A) \rho^n$ . Если мы рассмотрим двумерное уравнение и возьмем аппроксимацию вида  $\rho^{n+1} = (I + A + B) \rho^n$ , то получим устойчивую схему. Однако если использовать операторное уравнение  $\rho^{n+1} = (I + A)(I + B) \rho^n$ , то схема будет устойчивой. Такая схема и была реализована в третьем варианте программы LAYER. Разностные уравнения можно представить

В виде

$$\rho^{n+1} = (I + A)(I + B)(I + C)(I + D)\rho^n.$$

Вычислительный процесс, выполняемый на каждом шаге по мени, делится на четыре этапа. На первом этапе вычисляется перенос в направлении  $Z$ , на втором — в направлении  $R$  с использованием результатов первого этапа, затем — в направлении  $u_z$  с использованием результатов второго этапа и, наконец, в направлении  $u_r$  с использованием результатов третьего этапа. Для уравнения (44) соответствующие разностные уравнения даются формулами (59а) — (59г); при этом дробная запись используется для удобства обозначения этапов и не представляет дробных временных шагов:

$$\rho_{i,j,k,t}^{n+1/4} = \rho_{i,j,k,t}^n + \frac{1}{4} \sigma_{i,j,k,t} \Delta \tau - \left( \frac{kh \Delta \tau}{2mkv_{i,j,k,t}^n} \right) (\rho_{i+1,j,k,t}^n - \rho_{i-1,j,k,t}^n) + \left( \frac{kh \Delta \tau}{mk} \right)^2 \frac{1}{v_{i,j,k,t}^n} \left( \frac{\rho_{i+1,j,k,t}^n - \rho_{i-1,j,k,t}^n}{v_{i+1,j,k,t}^n + v_{i-1,j,k,t}^n} - \frac{\rho_{i,j,k,t}^n - \rho_{i-1,j,k,t}^n}{v_{i,j,k,t}^n + v_{i-1,j,k,t}^n} \right)$$

$$\rho_{i,j,k,t}^{n+1/2} = \rho_{i,j,k,t}^{n+1/4} + \frac{1}{4} \sigma_{i,j,k,t} \Delta \tau - \left( \frac{h \Delta \tau}{2kv_{i,j,k,t}^n} \right) \times \left( \rho_{i,j+1,k,t}^{n+1/4} - \rho_{i,j-1,k,t}^{n+1/4} \right) + \left( \frac{h \Delta \tau}{k} \right)^2 \frac{1}{v_{i,j,k,t}^n} \times \left( \frac{\rho_{i,j+1,k,t}^{n+1/4} - \rho_{i,j-1,k,t}^{n+1/4}}{v_{i,j+1,k,t}^n + v_{i,j-1,k,t}^n} - \frac{\rho_{i,j,k,t}^{n+1/4} - \rho_{i,j-1,k,t}^{n+1/4}}{v_{i,j,k,t}^n + v_{i,j-1,k,t}^n} \right),$$

$$\rho_{i,j,k,t}^{n+3/4} = \rho_{i,j,k,t}^{n+1/2} + \frac{1}{4} \sigma_{i,j,k,t} \Delta \tau + \left( \frac{P_{i,j,k,t}^n \Delta \tau}{2khv_{i,j,k,t}^n} \right) (\rho_{i,j,k+1,t}^{n+1/2} - \rho_{i,j,k-1,t}^{n+1/2}) + \left( \frac{P_{i,j,k,t}^n \Delta \tau}{kh} \right)^2 \frac{1}{v_{i,j,k,t}^n} \left( \frac{\rho_{i,j,k+1,t}^{n+1/2} - \rho_{i,j,k-1,t}^{n+1/2}}{v_{i,j,k+1,t}^n + v_{i,j,k-1,t}^n} - \frac{\rho_{i,j,k,t}^{n+1/2} - \rho_{i,j,k-1,t}^{n+1/2}}{v_{i,j,k,t}^n + v_{i,j,k-1,t}^n} \right),$$

$$\rho_{i,j,k,t}^{n+1} = \rho_{i,j,k,t}^{n+3/4} + \frac{1}{4} \sigma_{i,j,k,t} \Delta \tau + \left( \frac{P_{i,j,k,t}^n \Delta \tau}{2khv_{i,j,k,t}^n} \right) \times \left( \rho_{i,j,k,t+1}^{n+3/4} - \rho_{i,j,k,t-1}^{n+3/4} \right) +$$

$$+ \left[ \frac{(P_{i,j,k,t}^n \Delta \tau)^2}{kh^2} \right] \frac{1}{v_{i,j,k,t}^n} \left( \frac{\rho_{i,j,k,t+1}^{n+3/4} - \rho_{i,j,k,t-1}^{n+3/4}}{v_{i,j,k,t+1}^n + v_{i,j,k,t-1}^n} - \frac{\rho_{i,j,k,t}^{n+3/4} - \rho_{i,j,k,t-1}^{n+3/4}}{v_{i,j,k,t}^n + v_{i,j,k,t-1}^n} \right). \quad (59г)$$

Условия устойчивости для этого конечно-разностного метода указаны в соотношениях (58).

Так как конечно-разностная сетка четырехмерного фазового пространства состоит из очень большого числа узлов, то для каждого момента времени только часть информации можно поместить в оперативной памяти; остальная часть размещается на магнитных дисках. В оперативной памяти находятся все значения  $\rho$  и  $\gamma$  для четырех полюсов по  $i, t$ , е. при фиксированном значении  $k$  величины  $v_{i,j,k,t}^n, \rho_{i,j,k,t}^n, \rho_{i-1,j,k,t}^n, \gamma_{i-1,j,k,t}^n, \rho_{i+1,j,k,t}^n$  и т. д. при всех  $j, k, l$  используются для вычисления  $\rho_{i,j,k,t}^{n+1/4}$  при всех  $j, k, l$ . Величины  $\rho_{i,j,k,t}^{n+1/2}$  при всех  $j, k, l$  вычисляются и помещаются на место  $\rho_{i,j,k,t}^n$ , которые в дальнейшем не нужны; затем вычисляются  $\rho_{i,j,k,t}^{n+3/4}$  и помещаются на место  $\rho_{i,j,k,t}^{n+1/2}$ , наконец, вычисляются  $\rho_{i,j,k,t}^{n+1}$  и помещаются на место  $\rho_{i,j,k,t}^n$ . До перехода к следующему значению  $i$  вычисляются вклады в различные интегралы, такие, как  $I$ , и проводится контроль консервативности. Когда циклы вычисления  $\rho$  закончены для всех значений  $i$ , можно решить уравнение для  $\mu$ , завершая самосогласованное решение на шаге по времени.

Рассмотрим реализацию граничных условий для уравнения, которому удовлетворяет функция  $\rho$ , и вопрос о сохранении числа частиц. Частицы могут теряться на физических границах  $Z = \pm l^*$ ,  $Z = -l^*$ ,  $R = R_1$  и  $R = R_2$ . В ходе вычислений они могут теряться также и на границах области скоростей.

При  $i = -I$  ( $Z = +l^*$ ) для  $k \geq 0$  вместо формул (59а) мы используем

$$\rho_{i,j,k,t}^{n+1/4} = \rho_{i,j,k,t}^n - \left( \frac{kh \Delta \tau}{mkv_{i,j,k,t}^n} \right) (\rho_{i,j,k,t}^n - \rho_{i-1,j,k,t}^n), \quad (60)$$

и затем используем формулы (59б) — (59г) для вычисления  $\rho_{i,j,k,t}^{n+1}$ ,  $k \geq 0$ . В этих формулах мы полагаем  $\sigma_{i,j,k,t} = 0$  для  $k \geq 0$ . При  $i = I$  для  $k < 0$  инжектируются частицы. В этом случае формула (59а) принимает вид

$$\rho_{i,j,k,t}^{n+1/4} = \rho_{i,j,k,t}^n + \frac{1}{4} \sigma_{i,j,k,t} \Delta \tau + \left( \frac{kh \Delta \tau}{2mkv_{i,j,k,t}^n} \right) \rho_{i-1,j,k,t}^n + \left( \frac{kh \Delta \tau}{mk} \right)^2 \frac{1}{v_{i,j,k,t}^n} \left( \frac{-\rho_{i,j,k,t}^n}{2v_{i,j,k,t}^n} - \frac{\rho_{i,j,k,t}^n - \rho_{i-1,j,k,t}^n}{v_{i,j,k,t}^n + v_{i-1,j,k,t}^n} \right). \quad (61)$$

Дальше для вычисления  $\rho_{j,k,l}^{n+1}$  при  $k < 0$  используются формулы (59б)–(59г). Необходимо также вычислить поток терм. частиц при  $Z = l^*$ . Для  $k > 0$  значения  $\rho_{j,k,l}^{n+1}$  вклада в сумму

$$M_T^{n+1} = h^{*3} \Delta t \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{k=-1}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I k \frac{\rho_{j,k,l}^{n+1}}{V_{T,j,k,l}^{n+1}}$$

При  $i = -I$  ( $Z = -l^*$ ) для  $k \leq 0$  вместо (59а) мы используем

$$\rho_{-I,j,k,-l}^{n+1/2} = \rho_{-I,j,k,-l}^n - \left( \frac{h^* \Delta t}{mh^* V_{T,-I,j,k,-l}^n} \right) (\rho_{-I+1,j,k,-l}^n - \rho_{-I,j,k,-l}^n)$$

и затем для вычисления  $\rho_{-I,j,k,-l}^{n+1}$  при  $k \leq 0$  используем формулы (59б)–(59г). Так как с этой стороны при  $k > 0$  частицы инжектируются, мы ставим условие  $\rho_{-I,j,k,-l}^{n+1} = 0$ . При  $i = -I$  для  $k < 0$  вычисляем сумму

$$M_T^{n+1} = h^{*3} \Delta t \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{k=-1}^{-K} \sum_{l=-L}^L \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I |k| \left| \frac{\rho_{-I,j,k,-l}^{n+1}}{V_{T,-I,j,k,-l}^{n+1}} \right|$$

Внутренней границей по радиусу для уравнения (44),  $R = R_1$  мы считаем значение  $R_1 = j_{\text{max}} h$  и другой границей — значение  $R_2 = J_{\rho} h$ . При  $j = J_{\rho}$  и  $l < 0$  мы ставим условие  $\rho_{j,k,l}^{n+1} = 0$  для всех  $i, k, n$ . При  $l \geq 0$  и  $j = J_{\rho}$  значения  $\rho$  вычисляются от этого сечения по формулам (59а) вычисляются  $\rho_{j,k,l}^{n+1/2}$ . В (59б) мы используем

$$\rho_{j,k,l}^{n+1/2} = \rho_{j,k,l}^n + \left( \frac{h^* \Delta t}{h^* V_{T,j,k,l}^n} \right) (\rho_{j+1,k,l}^{n+1/2} - \rho_{j,k,l}^{n+1/2})$$

Затем значения  $\rho_{j,k,l}^{n+1}$  ( $l \geq 0$ ) вычисляются по формулам в (59г). В сумму термических частиц добавляются частицы, потерянные при  $R = R_2$ ,

$$Q_{\rho}^{n+1} = h^{*3} (mh) \Delta t \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{j=1}^{J_{\rho}} \sum_{i=1}^I l \frac{\rho_{j,k,l}^{n+1}}{V_{T,j,k,l}^{n+1}}$$

( $mh = \Delta Z$  и  $m'$  — индекс суммирования).

При  $j = j_{\text{min}}$  и  $l > 0$  мы ставим условие  $\rho_{j,k,l}^{n+1} = 0$  для всех  $i, k, n$ . Для  $l \leq 0$  сначала вычисляются  $\rho_{j,k,l}^{n+1/2}$  по формулам (59а). Вместо (59б) мы используем

$$\rho_{j,k,l}^{n+1/2} = \rho_{j,k,l}^n - \left( \frac{h^* \Delta t}{h^* V_{T,j,k,l}^n} \right) (\rho_{j-1,k,l}^{n+1/2} - \rho_{j,k,l}^{n+1/2})$$

Затем вычисляем  $\rho_{j,k,l}^{n+1}$  ( $l \leq 0$ ), используя формулы (59в) и (59г). В сумму термических частиц добавляются частицы, потерянные при  $R = R_1$

$$Q_{\text{пл}}^{n+1} = h^{*3} (mh) \Delta t \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \sum_{j=1}^J |l| \left| \frac{\rho_{j,k,l}^{n+1}}{V_{T,j,k,l}^{n+1}} \right| \quad (68)$$

Вдоль границ в пространстве скоростей  $k = \pm K$  и  $l = \pm L$  мы вычисляем  $\rho$  по обычным формулам (59а)–(59г). При этом мы ставим условие

$$\rho_{\pm K,j,k,\pm L}^n = \rho_{\pm K,j,k,\mp L}^n = 0$$

для всех  $i, j, l, n$ , когда используются формулы (59а), и

$$\rho_{\pm K,j,k,\pm L}^n = \rho_{\pm K,j,k,-L}^n = 0$$

для всех  $i, j, l, n$ , когда используются формулы (59г). Чтобы такая процедура была оправданной, необходимо взять  $Kh^*$  и  $Lh^*$  достаточно большими.

Кроме сумм  $M$  и  $Q$  для потерянных на материальных границах частиц, вычисляются также суммы инжектированных частиц и суммы частиц на сетке.

Общее число частиц, инжектированных в систему в момент  $t$ , дается выражением  $\Delta u_r \Delta u_z \Delta r \Delta z \int_0^1 S dt'$ , где  $\Delta u_r \Delta u_z \Delta r \Delta z$  — элемент фазового пространства, используемый для инжекции. Если мы инжектируем частицы в одну ячейку, то вычисляем безразмерную величину

$$N^{n+1} = h^{*2} \Delta t^2 m \sum_{m=1}^{n+1} \sigma^m \Delta \tau_{m^*} \quad (69)$$

Полное число частиц в системе в момент времени  $t = t_{n+1}$  пропорционально

$$SUM^{n+1} = h^{*2} \Delta t^2 m \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L \rho_{i,j,k,l}^{n+1} \quad (70)$$

При сохранении числа частиц должно выполняться равенство

$$SUM^{n+1} + M^{n+1} + Q^{n+1} = N^{n+1}, \quad (71)$$

в котором  $M$  и  $Q$  означают полное число частиц, потерянных на физических границах и определенных формулами (62), (64), (66) и (68).

Определим энергию электромагнитного поля выражением

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^{r_{\text{max}}} dz \int_0^1 r dr [E^2 + E_z^2].$$



Разделив это выражение на постоянную  $r_0^2 B_0^2/4$ , мы получим величину

$$F(t) = \int_{-1^*}^{1^*} dZ \int_0^{R_{\max}} R dR (\bar{v}_z^2 + \bar{v}_z^2 + \bar{e}_z^2),$$

где

$$\bar{e}_0 = \frac{E_0}{E_0} = -\frac{1}{2R} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}.$$

Квадратурная формула для этого интеграла имеет вид

$$F^{n+1} = h^2 m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j \{ ( (\bar{b}_i)_{i,j}^{n+1} )^2 + ( (\bar{b}_z)_{i,j}^{n+1} )^2 + ( (\bar{e}_0)_{i,j}^{n+1} )^2 \}.$$

Энергию инжектированных частиц можно определить выражением

$$m_0 c^2 \Delta u_r \Delta u_z \Delta r \Delta z \int_0^1 \gamma S dt'.$$

Разделив его на  $r_0^2 B_0^2/4$ , с учетом описанного выше способа ции получим

$$T^{n+1} = C_1^{-1} h^2 m \sum_{m=1}^{n+1} \gamma_{(m)}^{m'} \sigma^{m'} \Delta t^{m'},$$

где  $\gamma_{(m)}^{m'}$  — значение  $\gamma$  для того элемента, в который входят частицы. Энергия частиц в системе равна

$$m_0 c^2 \iiint \gamma f dr dz du_r du_z.$$

Снова, разделив ее на  $r_0^2 B_0^2/4$ , будем вычислять безразмерную величину

$$E^{n+1} = C_1^{-1} h^2 m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=-K}^K \sum_{l=L}^L \gamma_{i,j,k,l}^{n+1} \phi_{i,j,k,l}^{n+1}.$$

Тогда уравнение сохранения энергии, используемое для  $E$ , принимает вид

$$F^{n+1} - F^n + E^{n+1} = T^{n+1}.$$

#### д. Применения

В программе LAYER предусмотрены два возможных задания внешнего магнитного поля. В первом варианте используются формулы

$$a_{ec} = A_1 R + A_2 I_1(\lambda R) \cos \lambda Z,$$

$$b_{rc} = \lambda A_2 I_1(\lambda R) \sin \lambda Z, \quad (76)$$

$$b_{zc} = 2A_1 + \lambda A_2 I_0(\lambda R) \cos \lambda Z, \quad (76b)$$

где  $I_0$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя первого рода и  $\lambda$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  — заданные постоянные.

Другой вариант имеет вид

$$a_{0c} = \frac{R}{2} + \frac{\alpha}{\lambda} J_1(\lambda R) e^{-\lambda R} \operatorname{ch} \lambda Z, \quad (77a)$$

$$b_{rc} = -\alpha J_1(\lambda R) e^{-\lambda R} \operatorname{sh} \lambda Z, \quad (77b)$$

$$b_{zc} = 1 + \alpha J_0(\lambda R) e^{-\lambda R} \operatorname{ch} \lambda Z, \quad (77b)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  — функции Бесселя первого рода и  $\lambda$ ,  $\alpha$  — заданные постоянные. Преимущество этого способа состоит в том, что если  $\lambda$  удовлетворяет уравнению

$$\lambda J_0(\lambda) = J_1(\lambda),$$

то  $P_r = 0$  при  $R = 1$  для всех  $Z$ . Следовательно, если частицы инжектируются при  $R = 1$  с  $u_r \rightarrow 0$ , то они не будут распространяться вдоль радиуса в начальной стадии формирования электрического слоя. Конечно, вследствие роста собственного поля  $P_r$  он будет потом равно нулю при  $R = 1$  и слой будет расширяться в радиальном направлении.

Значение  $\alpha$  определяется желаемым углом наклона в средней плоскости. Рассмотрим равновесную орбиту частицы,  $R = 1$ , с компонентами скорости в средней плоскости  $z=0$

$$(\dot{R}, R\dot{\theta}, \dot{Z}) = (0, v \sin \delta, v \cos \delta);$$

тогда для той орбиты, которая повернет назад при  $Z = 1^*$ , будет выполняться равенство

$$\alpha = -\frac{2\lambda (\operatorname{cosec} \delta + 1)}{J_1(\lambda)},$$

Введенную выше постоянную  $B_0$  можно определить следующим образом:

$$B_0 = -\frac{m_0 c^2 \gamma \beta}{e r_0} \sin \delta,$$

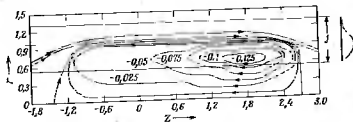
где  $\beta$  и  $\gamma$  — параметры, зависящие от энергии инжекции. Зная  $B_0$  и  $r_0$ , можно вычислить значение параметра  $C_1$ . В частности, при  $r_0 = 30$  см и  $B_0 = 600$  Гс получается  $C_1 = -5,27$ .

С помощью описанной программы было выполнено много вычислений для различных условий инжекции и нескольких вариантов инжекции внешнего магнитного поля в случае длинного и короткого  $E$ -слоя. В первых вариантах для вычисления внешнего магнитного поля обычно использовались формулы (77). Часть

результатов вычислений обсуждается в работе Киллина и Рипль [4].

В более поздних вариантах внешнее магнитное поле вычислось по формулам (76) с заданными, но различными при  $Z > 0$  и  $Z < 0$  параметрами  $A_1$  и  $A_2$ . Основанием для такого выбора служит необходимость получить сильную магнитную пробку  $Z = -l^*$  в случае инжекции со стороны  $Z = +l^*$ .

На фиг. 1 показаны силовые линии магнитного поля для шепши, при котором суммарное поле имеет направление.



Фиг. 1. Силовые линии магнитного поля для решетки с изменением вклада полей, полученного с помощью программы LAYER.

В случае фиг. 1 область  $Z$  имеет размеры  $-3 \leq Z \leq 3$  с длиной дуги  $l_0 = 30$  см. Область  $R$  имеет размеры  $0 \leq R \leq R_1 = 0,5$  и  $R_2 = 1,5$ . Область скоростей имеет размеры  $-1 \leq u_r \leq 10$  и  $-5 \leq u_z \leq 5$ . Применявшаяся конечно-разностная сетка имела ячейки со сторонами  $\Delta R = h = 0,1$ ,  $\Delta Z = \Delta r = 0,2$ ,  $\Delta u_r = \Delta u_z = h^* = 1,0$ .

Источники электронов описываются функцией  $\sigma$  согласно формуле (45). Инжекция осуществлялась в одной точке фазового пространства, а именно в точке  $Z = 3$ ,  $R = 1$ ,  $u_z = -1$ ,  $u_r$  — причем на каждом временном шаге вводилось  $\sigma \Delta t$  элементарных частиц. Если ток электронов в 1000 А инжектируется в объем фазового пространства  $\Delta R \Delta Z \Delta u_r \Delta u_z = (0,1)(0,2)(30)^2$  см<sup>3</sup>, то из формулы (45) получается значение  $\sigma = 3,0$ . Обычная процедура состоит в том, чтобы решать задачу формирования, определяемую уравнениями (43) и (44), до установления стационарного решения, при котором уравновешиваются поступление и потери электронов. Затем можно удвоить  $\sigma$  и продолжать решение до установления нового стационарного состояния и т. д. Результаты вычисления изображены на фиг. 1, был получен для  $\sigma = 12,0$ . Необходимо отметить, что захватывающий эффект проводящих шин не включен в модель. Он учитывается в новом варианте программы LAYER.

### § 3. Модели плазмы с малым $\beta$ , использующие дрейфовые уравнения движения ведущего центра

#### 1. Линейная модель

##### а. Основные уравнения

Мы рассматриваем проблему крупномасштабной устойчивости ограниченной неоднородной плазмы, в которой отсутствуют столкновения и мал параметр  $\beta$ . В теоретическом исследовании учитывается стабилизирующий эффект, обусловленный конечным размером поперечных орбит, а также некоторые новые особенности, не учитывавшиеся в предыдущих работах. В частности, изучается влияние электрического поля нулевого порядка и эффект неравенства плотностей ионов и электронов. Предполагается, что как электрическое, так и магнитное поля являются произвольными функциями пространственной координаты  $r$ . Учет этих особенностей представляет собой попытку объяснить экспериментальные явления, наблюдавшиеся в экспериментах на установке «Алма» с внешней инжекцией нейтральных атомов [7].

Мы запишем уравнения в цилиндрической геометрии и используем подход работы [8], в которой учитывалась цилиндрическая форма плазмы и граничные условия на металлической стенке. В общем случае невозможно получить аналитическое решение соответствующих уравнений, поэтому основные уравнения решаются численно конечно-разностными методами. Аналитические решения, которые удалось получить для некоторых продольных случаев, являются в согласии с численными расчетами.

Рассмотрим двумерную двухжидкостную модель. Все возмущенные величины будем считать функциями цилиндрических координат  $r$  и  $\varphi$  и времени  $t$ . Невозмущенные плотности компонент плазмы, магнитное поле и электрическое поле нулевого порядка являются функциями только  $r$ . Уравнение для возмущенного электростатического потенциала  $\phi$  имеет вид

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e \left[ \frac{2}{\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{n_+(R, \varphi, t) R dR}{[4R^2 r^2 - (R^2 + r^2 - a^2)^2]^{1/2}} - n_-(r, \varphi, t) \right], \quad (78)$$

где  $n_+$  и  $n_-$  — возмущенные плотности ведущих центров ионов и электронов,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света и  $a$  — ламарковский радиус поперечности. Уравнение (78) было получено подстановкой в уравнение Пуассона выражения для плотности поперечности

$$\frac{2}{\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{n_+(R, \varphi, t) R dR}{[4R^2 r^2 - (R^2 + r^2 - a^2)^2]^{1/2}}$$

которое является точным выражением для плотности частиц, описанной через плотность ведущих центров [9]. В отношении вращений мы полагаем, что плотность частиц совпадает с плотностью ведущих центров.

Так как магнитное поле и электрическое поле нулевого порядка,  $E_0$ , зависят только от  $r$  и  $E_0$  направлено вдоль радиуса, а дальние компоненты дрейфовых скоростей нулевого порядка равны нулю. Линейаризованные уравнения непрерывности для плотности ведущих центров имеют вид

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + (\mathbf{V}_+ \cdot \nabla) n_+ + (\mathbf{V}_+ \cdot \nabla) N_+ + N_+ \operatorname{div} \mathbf{V}_+ = 0,$$

$$\frac{\partial n_-}{\partial t} + (\mathbf{V}_- \cdot \nabla) n_- + (\mathbf{V}_- \cdot \nabla) N_- + N_- \operatorname{div} \mathbf{V}_- = 0,$$

где  $N_+(r)$  и  $N_-(r)$  — невозмущенные плотности ларморовских центров ионов и электронов,  $\mathbf{V}_+$  и  $\mathbf{V}_-$  — дрейфовые скорости нулевого порядка для ионов и электронов, обусловленные градиентом магнитного поля и складываем  $\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}/B^2$  и  $\mathbf{v}_+$ ,  $\mathbf{v}_-$  — возмущенные дрейфовые скорости. Последние имеют вид

$$\mathbf{v}_+ = \frac{E_1 \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{a^2 \nabla^2 E_1 \times \mathbf{B}}{B^2},$$

$$\mathbf{v}_- = \frac{E_1 \times \mathbf{B}}{B^2},$$

где

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla \psi, \quad \mathbf{B} = B_r(r) \mathbf{e}_0 + B_\theta(r) \mathbf{e}_\theta + B_z(r) \mathbf{e}_z,$$

$$B^2 = B_r^2 + B_\theta^2 + B_z^2.$$

В формуле (81) учтено выражение

$$\langle \mathbf{E}_1 \rangle = \mathbf{E}_1 + \frac{a^2}{4} \nabla^2 \mathbf{E}_1$$

для среднего значения вдоль ионной орбиты, которое складываем второго порядка относительно ларморовского радиуса  $a$ . В выражении для возмущенной скорости электронов нужно выполнять усреднение, так как ларморовский радиус электронов считается пренебрежимо малым. В выражении (82) мы пренебрегаем также складываемыми дрейфовой скоростью  $(d/dt + \mathbf{V}_\pm \cdot \nabla) \mathbf{E}_1/B\omega_c$ , которые для типичных полей в связи с магнитными пробками малы по сравнению с поправочными членами, возникающими из-за конечных размеров ионных ячеек.

Мы предполагаем, что возмущенный электростатический потенциал и возмущенные плотности ионов и электронов имеют форму:

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi, t) &= \psi(r, t) e^{im\varphi}, \\ n_+(r, \varphi, t) &= n_+(r, t) e^{im\varphi}, \\ n_-(r, \varphi, t) &= n_-(r, t) e^{im\varphi}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (78) принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \psi = \\ &= -4\pi e \left[ \frac{r}{\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{n_+(R, t) R dR}{4R^2 z^2 - (R^2 + r^2 - a^2) z^2} - n_-(r, t) \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Магнитное и электрическое поля того типа, который мы рассматриваем, приводят к появлению компонент дрейфовых скоростей в направлении  $z$ , однако эти компоненты не включаются в уравнения. Из формулы (84) можно получить выражения для  $r$ -компоненты дрейфовой скорости ионов и ее дивергенция:

$$v_{z+} = -\frac{im}{r} \frac{B_z}{B^2} \left[ \psi + \frac{a^2}{4} \nabla^2 \psi \right] e^{im\varphi}, \quad (85)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_+ = -\frac{im}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{B_z}{B^2} \right) \left[ \psi + \frac{a^2}{4} \nabla^2 \psi \right] e^{im\varphi}. \quad (86)$$

Дрейфовую скорость нулевого порядка для ионов можно записать в виде  $\mathbf{V}_+ = \varphi_0 \mathbf{V}_+(r)$ , где

$$\mathbf{V}_+(r) = r(\Omega_M + \Omega_E). \quad (87)$$

Предполагается, что функция распределения энергии ионов имеет вид  $\delta$ -функции. Частота прецессии из-за градиента магнитного поля равна

$$\Omega_M = \frac{cT}{ar} \frac{B_z}{B^3} \frac{dB}{dr}, \quad (88)$$

где  $T$  — энергия ионов. Электрическая составляющая частоты прецессии, вызываемой электрическим полем нулевого порядка, равна

$$\Omega_E = -\frac{4\pi e c (1-\Gamma)}{r^2 B} \int_0^r \eta_+(r') r' dr', \quad (89)$$

где  $\eta_+(r)$  — невозмущенная плотность ионов. В формуле (89) использовано предположение, что ионная и электронная плотности имеют одинаковую пространственную зависимость, т. е.  $\eta_-(r) = -\Gamma \eta_+(r)$ , где  $\Gamma$  — постоянная величина. С учетом соотношений (85)–(89) уравнение (79) принимает вид

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + iC n_+ + iH \left[ \psi + \frac{a^2}{4} \nabla^2 \psi \right] = 0, \quad (90)$$

где

$$C(r) = \frac{m}{r} V_z(r) = m(\Omega_M + \Omega_E),$$

$$H(r) = -\frac{m}{r} \left[ \frac{B_z}{B^2} \frac{dN_+}{dr} + N_+ \frac{d}{dr} \left( \frac{B_z}{B^2} \right) \right].$$

При решении уравнения (90) мы подставляем  $\Delta^2 \psi$  из уравнения

$$\nabla^2 \psi = -4\pi e \left[ n_+ - n_- + \frac{a^2}{4} \nabla^2 n_+ \right].$$

Это уравнение получается подстановкой в уравнение Пуассе выражения  $n_e + (a^2/4)\nabla^2 n_e$  для плотности ионов, которое состоит слагаемое второго порядка по ларморовскому радиусу ионов. Уравнение (90) можно теперь переписать в виде

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + iGn_e + iH \left[ \psi - \text{песа}^2 \left( n_e - n_e + \frac{a^2}{4} \nabla^2 n_e \right) \right] = 0.$$

Уравнение (91) имеет то преимущество, что оно сходно по форме с уравнением диффузии относительно  $n_e(r, t)$  и для его решения можно использовать некую разностную схему.

Аналогичным образом нетрудно убедиться, что уравнение (92) примет вид

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + iPn_e - iQ\psi = 0,$$

где

$$P(r) = \frac{m}{r} V_z(r) - m\Omega_e, \quad Q(r) = -\frac{m}{r} \left[ \frac{B_z}{B^2} \frac{dN_e}{dr} + N_e \frac{d}{dr} \left( \frac{B_z}{B^2} \right) \right].$$

Уравнения (84), (91) и (92) являются основными в данной модели. Они образуют систему уравнений с частными производными для комплексных функций  $\psi$ ,  $n_e$  и  $n_i$ . Если положить

$$\psi = V + iW, \quad n_e = \rho + i\gamma, \quad n_i = \theta + i\delta,$$

и приравнять действительные и мнимые части уравнений, то получится система действительных уравнений

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \rho - \text{песа}^2 \left[ \frac{2}{\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{\rho(R, t) R dR}{[4Rr^2 - (R^2 + r^2 - a^2)^2]^{1/2}} - \theta(r, t) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} W = \\ = -4\text{песа} \left[ \frac{2}{\pi} \int_{r-a}^{r+a} \frac{\gamma(R, t) R dR}{[4Rr^2 - (R^2 + r^2 - a^2)^2]^{1/2}} - \delta(r, t) \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = C\rho + HW - \text{песа}^2 H \left[ \gamma - \delta + \frac{a^2}{4} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \rho \right) \right],$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -C\rho - HW + \text{песа}^2 H \left[ \rho - \theta + \frac{a^2}{4} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \rho \right) \right],$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = P\delta + QW,$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -P\theta - QV.$$

Мы хотим найти решения уравнений (94)–(99), удовлетворяющие следующим начальным условиям: при  $t = 0$  действительные части возмущений плотности электронов и ионов имеют вид

$$\rho(r) = \theta(r) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2} \quad \text{для } r < r_0,$$

$$\rho(r) = \theta(r) = 0 \quad \text{для } r > r_0,$$

где  $r_0 = r_{\text{Ларм}}^{\text{макс}}$  —  $a$  и  $a$  — ларморовский радиус ионов. Граничные условия при  $r = 0$ :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{dW}{dr} = \frac{d\rho}{dr} = \frac{d\gamma}{dr} = \frac{d\theta}{dr} = \frac{d\delta}{dr} = 0.$$

Граничные условия при  $r = r_{\text{макс}}$ :

$$V = W = \rho = \gamma = \theta = \delta = 0.$$

### 6. Разностные методы

Итак, мы будем решать задачу с начальными условиями для уравнений (94)–(99) в области

$$0 \leq r \leq r_{\text{макс}}, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим в этой области конечно-разностную сетку вида

$$r_j = j\Delta r, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, J,$$

где  $r_J = r_{\text{макс}} = J\Delta r$  и  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Мы используем обычные обозначения, т. е.

$$V_j^n = V(r_j, t_n) \quad \text{и т. д.},$$

и следующие разностные аппроксимации:

$$\left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)_j^n = \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\Delta r}, \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right)_j^n = \frac{V_{j+1}^n + V_{j-1}^n - 2V_j^n + V_j^{n-1}}{(\Delta r)^2}.$$

Для уравнений (94) и (95) можно записать разностную аппроксимацию вида

$$-a_j V_{j+1}^{n+1} + b_j V_j^{n+1} - c_j V_{j-1}^{n+1} = d_j^{n+1}, \quad (100)$$

$$-a_j W_{j+1}^{n+1} + b_j W_j^{n+1} - c_j W_{j-1}^{n+1} = k_j^{n+1}, \quad (101)$$

где

$$-a_j = \frac{1}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{2r_j \Delta r}, \quad b_j = \frac{2}{(\Delta r)^2} - \frac{m^2}{r_j^2}, \quad c_j = \frac{1}{(\Delta r)^2} - \frac{1}{2r_j \Delta r},$$

$$d_j^{n+1} = k \left[ \frac{2}{\pi} \left( \int_{r-a}^{r+a} \frac{\rho(R) R dR}{[4Rr^2 - (R^2 + r^2 - a^2)^2]^{1/2}} \right)_j^{n+1} - \theta_j^{n+1} \right],$$

$$k_j^{n+1} = k \left[ \frac{2}{\pi} \left( \int_{r-a}^{r+a} \frac{\gamma(R) R dR}{[4Rr^2 - (R^2 + r^2 - a^2)^2]^{1/2}} \right)_j^{n+1} - \delta_j^{n+1} \right].$$

$k$  — бесконечность,  $\bar{a}$  — ионный ларморовский радиус. Интегралы в формулах находятся численно в точках  $r_j$  с использованием значений  $\gamma_j^{n+1}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, J$ . Подынтегральные функции имеют особенности в граничных точках, но интегрируются. В окрестности граничных точек использовалась теорема о главном значении в оставшейся области,  $r - \bar{a} + \Delta \leq R \leq r + \bar{a} - \Delta$ , применялась формула трапеций. Для обеспечения нужной точности интегрирования использовалось не менее десяти точек, так на отрезке  $\bar{a}$  умещалось не менее пяти точек  $r_j$ . Для малых значений  $r$ , когда область интегрирования содержит меньше десяти точек  $r_j$ , требуется интерполяция.

Для разностной аппроксимации уравнения (96) используем следующие невязные разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2} G_j (\gamma_j^{n+1} + \gamma_j^n) + H_j W_j^n + \\ &+ \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 H_j \left[ \gamma_j^{n+1} - \delta_j^{n+1} + \frac{\sigma_j^2}{4} (-a_j \rho_{j+1}^{n+1} + b_j \rho_{j-1}^{n+1} - c_j \rho_{j-1}^{n+1}) \right] \\ &+ \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 H_j \left[ \gamma_j^n - \delta_j^n + \frac{\sigma_j^2}{4} (-a_j \rho_{j+1}^n + b_j \rho_{j-1}^n - c_j \rho_{j-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

Аналогично аппроксимируется и уравнение (97):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_j^{n+1} - \gamma_j^n}{\Delta t} &= -\frac{1}{2} G_j (\rho_j^{n+1} + \rho_j^n) - H_j V_j^n - \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 H_j \left[ \rho_j^{n+1} - \theta_j^{n+1} + \right. \\ &+ \left. \frac{\sigma_j^2}{4} (-a_j \rho_{j+1}^{n+1} + b_j \rho_{j-1}^{n+1} - c_j \rho_{j-1}^{n+1}) \right] - \\ &- \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 H_j \left[ \rho_j^n - \theta_j^n + \frac{\sigma_j^2}{4} (-a_j \rho_{j+1}^n + b_j \rho_{j-1}^n - c_j \rho_{j-1}^n) \right]. \end{aligned}$$

Написанные выше разностные уравнения можно представить в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} A_j \rho_j^{n+1} + \rho_j^{n+1} - B_j \rho_{j+1}^{n+1} + C_j \rho_{j-1}^{n+1} &= D_j, \\ -A_j \rho_{j+1}^n + B_j \rho_j^n + \rho_j^n - C_j \rho_{j-1}^n - K_j \rho_j^n &, \end{aligned}$$

где

$$A_j = \frac{1}{32} k \bar{a}_j^2 H_j \rho_j \Delta t,$$

$$B_j = \frac{1}{2} G_j \Delta t + \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 H_j \Delta t + \frac{1}{32} k \bar{a}_j^2 H_j b_j \Delta t,$$

$$C_j = \frac{1}{32} k \bar{a}_j^2 H_j c_j \Delta t,$$

$$D_j = -A_j \rho_{j+1}^n + \rho_j^n + B_j \rho_j^n - C_j \rho_{j-1}^n + H_j W_j \Delta t - \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 (\delta_j^n + \delta_j^{n+1})$$

$$K_j = A_j \rho_{j-1}^n - B_j \rho_j^n + \rho_j^n + C_j \rho_{j-1}^n - H_j V_j^n \Delta t + \frac{1}{8} k \bar{a}_j^2 (\theta_j^n + \theta_j^{n+1})$$

Уравнения (98) и (99) содержат только производные по времени, и мы аппроксимируем их разностными уравнениями

$$\theta_j^{n+1} = \theta_j^{n+1} + 2\Delta t (P_j \delta_j^n + Q_j W_j^n), \quad (104)$$

$$\delta_j^{n+1} = \delta_j^{n+1} - 2\Delta t (P_j \delta_j^n + Q_j V_j^n). \quad (105)$$

Рассмотрим вопрос о решении системы уравнений (100)–(105). При фиксированном значении времени величины с верхним индексом  $n$  и  $n-1$  известны, а величины с верхним индексом  $n+1$  неизвестны. Первый шаг состоит в вычислении  $\theta_j^{n+1}$  и  $\delta_j^{n+1}$  для всех значений  $j$  по формулам (104) и (105). Следующим шагом служит вычисление  $\rho_j^{n+1}$  и  $\gamma_j^{n+1}$  для всех значений  $j$ . Чтобы решить систему уравнений (102) и (103), запишем их в виде одной системы

$$-\bar{A}_j \bar{V}_{j+1}^{n+1} + \bar{B}_j \bar{V}_j^{n+1} - \bar{C}_j \bar{V}_{j-1}^{n+1} = \bar{Q}_j^n, \quad (106)$$

где

$$\bar{V}_j^{n+1} = \begin{bmatrix} \rho_j^{n+1} \\ \gamma_j^{n+1} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_j^n = \begin{bmatrix} D_j^n \\ K_j^n \end{bmatrix},$$

и

$$-\bar{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & A_j \\ -A_j & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_j = \begin{bmatrix} 1 & -B_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix}, \quad -\bar{C}_j = \begin{bmatrix} 0 & C_j \\ -C_j & 0 \end{bmatrix}.$$

Для решения системы (106) мы воспользуемся следующим алгоритмом:

$$\bar{V}_j^{n+1} = \bar{E}_j \bar{V}_{j+1}^{n+1} + \bar{F}_j^{n+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1,$$

где матрицы  $\bar{E}_j$  и векторы  $\bar{F}_j^{n+1}$  определяются рекуррентными соотношениями

$$\bar{E}_j = (\bar{B}_j - \bar{C}_j \bar{E}_{j-1})^{-1} \bar{A}_j,$$

$$\bar{F}_j^{n+1} = (\bar{B}_j - \bar{C}_j \bar{E}_{j-1})^{-1} (\bar{Q}_j^n + \bar{C}_j \bar{F}_{j-1}^{n+1}).$$

Из граничных условий при  $r = 0$  следует

$$\bar{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{F}_0^{n+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисления выполняются в два этапа. На первом этапе вычисляются все коэффициенты  $\bar{E}_j$  и  $\bar{F}_j^{n+1}$ , на втором этапе вычисляются значения  $\bar{V}_j^{n+1}$ , начиная с тех  $\bar{V}_j^{n+1}$ , которые задаются с помощью величин  $\rho$  ( $r_{\text{макс}}, t$ ) и  $\gamma$  ( $r_{\text{макс}}, t$ ). Вычисление величин  $\rho_j^{n+1}$  и  $\gamma_j^{n+1}$  для всех значений  $j$  составляет третий шаг вычислительного цикла для момента времени  $t$ . Метод решения уравнений (100) и (101) такой же, как только что описанный метод решения уравнений (102) и (103).

Сформулированная математическая модель и описанные вычислительные методы были использованы для объяснения некоторых явлений, наблюдавшихся в плазме, образуемой путем инжекции нейтральных атомов в допускку с магнитными пробками. Опыты показали результаты [7], которые объясняют влияние плотности плазмы на коллективное поведение разреженной плазмы и подтверждают стабилизацию плазмы конечным размером области в условиях, наблюдавшихся экспериментально. С помощью программы можно также изучать устойчивость плазмы в пробках с положительным градиентом (с минимумом  $B$ ).

## 2. Двумерная нелинейная модель

### а. Основные уравнения

Неустойчивости плазмы с большими амплитудами мы будем изучать с помощью расчета на ЭВМ двумерного движения ионов и электронной жидкости. Две заряженные жидкости движутся в дрейфовых скоростях во внешних магнитном и гравитационном полях и в собственном электрическом поле, возникающем из-за наличия некомпенсированного заряда или разделения зарядов. Обе жидкости являются разреженными, взаимонепроницаемыми в некоторой области пространства и подвержены действию вязких сил. Действие сил, пропорциональных массе, на отчасти легкие электроны не учитывается; следовательно, существует разделение в скоростях жидкостей. Несопадение скоростей вызывает разделение зарядов и, следовательно, возникновение электрического поля  $E$ . В свою очередь это поле вместе с магнитным полем  $B$  вызывает колебания или экспоненциальное нарастание возмущений. Одним из вопросов, изучаемых в численных расчетах, является выявление особенностей конечной области (известных) неустойчивостей, когда в начальный момент возмущается малыми колебаниями.

Плазма нейтральна или почти нейтральна и находится в равновесии в однородном магнитном поле  $B$  и внешнем силовом поле  $F$ . Выражения для скоростей каждой жидкости следуют из дрейфовой теории [10]. Каждая жидкость удовлетворяет уравнению равновесия. Плотность некомпенсированного заряда  $e(n_e - n_i)$  используется в уравнении Пуассона для вычисления потенциала. Новое электрическое поле  $E$  изменяет дивергенцию скоростей и, следовательно, плотности.

Перемещение плазмы рассматривается как коллективное движение заряженных частиц, перпендикулярное магнитному полю. Отношение дрейфа плазмы к дрейфовому магнитному полю мало, что изменения в величине  $B$ , вызываемые токами в плазме, не учитываются. Сильное магнитное поле позволяет также

двигаться двумерным. Влияние кривизны магнитного поля моделируется однородным гравитационным полем  $g$ , перпендикулярным магнитному полю  $B$ . Как известно, дрейфовые приближения пригодны для описания большого числа высокочастотных явлений [11]. Влияние конечного размера гироорбит можно учесть с помощью поправочных членов [12]. Соответствующая физическая теория и результаты вычислений обсуждались в работах [13, 14].

Независимыми переменными являются пространственные координаты  $x, y$  и время  $t$ . Плазма занимает область, ограниченную при  $y = 0$  и  $y = h$  проводящими стенками, потенциал которых равен нулю; по  $x$  задача предполагается периодической с периодом  $L_x = 48 \Delta x$ . Зависимыми переменными являются плотности электронов  $n_e$  и ионов  $n_i$ , потенциал, создаваемый исключительно некомпенсированным (полным) зарядом, или разделением зарядов  $n_i - n_e$ , соответствующее электрическое поле  $E = -\nabla\phi$  и дрейфовые скорости  $v_e$  и  $v_i$  электронной и ионной жидкостей.

Уравнения, описывающие движение плазмы, имеют вид

$$\nabla^2 \phi = -\frac{e(n_i - n_e)}{\epsilon_0}, \quad (107)$$

$$E = -\nabla\phi, \quad (108)$$

$$v_e = -\frac{[E \times B]}{B^2}, \quad (109)$$

$$v_i = \frac{[E \times B]}{B^2} + \frac{m}{e} \frac{[g \times B]}{B^2} + \frac{m}{eB^2} \frac{dE}{dt}, \quad (110)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_i v_i), \quad (111)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_e v_e). \quad (112)$$

Решение разностных уравнений вычисляется в точках

$$x_i = i\Delta x, \quad i = 1, 2, \dots, 48; \quad y_j = j\Delta y, \quad j = 1, 2, \dots, 48$$

в моменты времени  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Общая схема решения состоит в следующем. Сначала по известным значениям плотностей  $n_i$  и  $n_e$  вычисляются потенциал  $\phi$ , электрическое поле  $E$  и, следовательно, скорости ведущих центров для фиксированного временного слоя. В численных расчетах, содержащих дифференцирование по времени, требуется хранение более чем одного временного слоя. Новые значения плотностей  $n_i$  и  $n_e$  вычисляются с помощью разностного решения уравнений непрерывности.

Мы рассматриваем плазму, в которой коллективное движение обеих заряженных компонент представляется собой медленный дрейф ведущих центров со скоростью  $E \times B/B^2$  поперек создаваемого внешнего магнитного поля. Такое описание движения заряженных

частиц в виде дрейфа ведущих центров пригодно только тогда, когда все частоты малы по сравнению с циклотронной частотой, то есть

$$\omega \ll \omega_{ci}$$

и все микроскопические длины намного больше, чем лонгитудинальный дебаевский радиус

$$L \gg a_i.$$

Эти требования приводят к ограничению максимальной плотности свободного заряда:

$$|n_i - n_e| \frac{m_i}{\epsilon_0 B^2} \ll 1.$$

Заметим, что значение  $K = n_i m_i / \epsilon_0 B^2$  может быть много больше единицы, если величина  $|n_i - n_e|$  достаточно мала. Параметры являются критическими и характеризуют реакцию плазмы на внешнее электрическое поле.

Предположение о том, что магнитное поле постоянно во времени, требует, чтобы все токи в плазме достаточно малы. Это и есть по существу приближение «малого  $\beta$ », которое пренебрегает величиной «тепловых» скоростей, или, проще, требует, чтобы плотность тепловой энергии плазмы была намного меньше плотности магнитной энергии.

Читатели, знакомые с гидродинамическими моделями движимых жидкостей, заметят близкую связь их с обсуждаемой моделью плазмы. В предельном случае, когда рассматривается одна заряженная компонента со скоростью  $v_E = E \times B$ , такая модель плазмы вполне аналогична гидродинамической модели, в которой плотность заряда играет роль плотности (компонента, скорость которой перпендикулярна плоскости течения), а электростатический потенциал играет роль функции. Новым фактором в этой модели плазмы является наличие противоположно заряженных жидкостей, в которых плотность свободного заряда обусловлена различием в плотности жидкостей. Его выражением служит следующий факт. Если две заряженные жидкости имеют примерно равные плотности, то даже небольшие относительные скорости важны, поскольку они могут вызвать разделение зарядов и, следовательно, привести к изменению электрического поля. По этой причине два последних слагаемых в скорости ионов очень важны (аналогичные слагаемые в скорости электронов не учитываются, так как отношение масс электронов к ионам  $(m_e/m_i) \ll 1$  ведет к разделению слагаемых вида  $(m_i/eB^2) \mathbf{g} \times \mathbf{B}$  и служит причиной возникновения мелкомасштабных гармоник Рундхейма в плазме [15]. Последнее слагаемое  $(m_i/eB^2) d\mathbf{v}/dt$  можно трактовать как поляризационный дрейф, также вызываемый разностью зарядов и является причиной существования плазменной

диэлектрической проницаемости плазмы,  $\epsilon_0(1+K)$ , где

$$K = \frac{n_i m_i}{\epsilon_0 B^2}.$$

Именно этот поляризационный дрейф вызывает сильную неустойчивость вычислений, в которых используется обычная процедура дифференцирования по времени (схема «с переагганизацией» или схема «средней точки»). Мы будем применять чередующиеся методы дифференцирования по времени, которые сохраняют положительные свойства схемы «с переагганизацией» и ликвидируют неустойчивость вычислений, вызываемую поляризационным дрейфом.

#### 6. Процедуры конечно-разностного дифференцирования в пространстве

В нашей модели применялись обычные хорошо известные пространственно-центрированные консервативные схемы разностного дифференцирования, которые обсуждались в § 2.

Метод, использованный при решении уравнений пятиточечной разностной схемы для уравнения Пуассона, аналогичен методу, описанному в работе [16]. Он представляет собой быстрое, прямое решение уравнения Пуассона. Метод основан на преобразовании Фурье для плотности зарядов по каждому направлению, вычисления коэффициентов Фурье для потенциала и последующем вычислении потенциала в каждой точке сетки суммированием членов Фурье вдоль каждого направления. Как оказалось, этот метод позволяет получить решение гораздо быстрее, чем любой известный релаксационный метод. К тому же вычисленные коэффициенты Фурье для плотности заряда и электростатического потенциала могут служить полезной диагностикой.

В ходе интегрирования уравнения непрерывности сохранение энергии достигается применением пространственно-центрированной разностной аналога оператора  $\nabla \cdot (n\mathbf{v})$ , который в простейшей двучленной форме для одномерного случая имеет вид

$$\frac{1}{2\Delta x} [(n\mathbf{v})_{j+1/2} - (n\mathbf{v})_{j-1/2}]. \quad (113)$$

Если интерпретировать величину

$$\int_{-1/2}^{+1/2} n dx = N_j$$

как полное количество жидкости в ячейке длиной  $\Delta x$  с центром в точке сетки  $j$ , то станет ясно, что полные потоки жидкости в ячейках  $j+2$  и  $j-2$  будут содержать вклады в точности ком-

пенсирующие количество жидкости, протекающее через ячейку (см. (113)). Такая схема имеет довольно неприятную особенность: соседние ячейки оказываются разведёнными (если ячейки компенсируют поток жидкости в других четных ячейках, нечетные ячейки компенсируют поток жидкости в других нечетных ячейках). Для одной специальной модели было показано, отмеченная особенность является причиной нелинейной вычислительной неустойчивости на коротких волнах [17]. В работе показано, что эта особая неустойчивость может быть подавлена применением специальных пространственно-разностных схем, можно применить и многих других разностных аппроксимаций по пространственным переменным. Известно, что расчеты для линейных уравнений жидкости часто наталкиваются на серьезные проблемы устойчивости вычислений (проявляющиеся в больших величинах лобной энергии в коротких волнах), которые возникают из-за слагаемых с разностными производными координат. Во многие модели для подавления коротких волн вносится искусственное затухание. Один из таких методов основан на специальной разностной схеме, определяемой уравнением (17). Для этой схемы множитель роста, получаемый анализе устойчивости, имеет вид

$$|\lambda| = 1 - O(k\Delta x)^4.$$

Знак минус означает, что схема будет иметь тенденцию к хвату волн, а зависимость вида  $(k\Delta x)^4$  означает, что короткие волны будут подавляться наиболее сильно.

Результаты коротких машинных вычислений, приемлемых простых частных случаев, нельзя переносить на другие типы. Другими словами, полный расчет должен быть по возможности кратким, чтобы за это время погрешности с малой длиной волны не выросли до опасных уровней. Отдельные кратковременные вычисления для обсуждаемой модели были усмотрены при незначительном влиянии или при полном отсутствии проблемы коротких волн [13, 14]. Другие расчеты для этой модели, проведенные в более сложных случаях, требовавших большей продолжительности машинного счета, поставили проблему устойчивости вычислений как раз такого типа. Полностью устойчивые вычисления требовали определенной формы контроля за кинематическими волнами.

Поправки к дрейфовым уравнениям движения вращающихся вихрей за счет конечности орбит можно учесть проекцией добавив в уравнение непрерывности для поворота. Эти дополнительные содержат операторы пространственного дифференцирования  $\nabla$  и  $\nabla^2$ . Они усложняют описываемую выше проблему коротких волн, но не вносят ничего принципиально нового в проблему дифференцирования по координатам.

#### в. Процедурные дифференцирования по времени.

##### Использование комбинированных схем

Рассмотрим вычислительную неустойчивость конечно-разностных уравнений, являющихся аналогами уравнения

$$\frac{du}{dt} = F(u, t), \quad (114)$$

которое есть общая форма уравнений непрерывности. Погрешность аппроксимации находится из сравнения уравнения (114) с разложением в ряд Тейлора конечно-разностной формы этого уравнения. Полная погрешность, возникающая за счет накопления погрешности аппроксимации для каждого шага по времени, должна оставаться малой. Препятствием все расчеты нелинейных жидкостей, когда в схемах с дифференцированием по времени для получения новых значений используется информация на двух временных уровнях, ограничивается памятью машины. Однако до сих пор существует большое число схем такого класса, и они сильно отличаются по точности и устойчивости. «Наилучший» выбор схем обычно зависит от фактического типа ожидаемого решения.

Изучим устойчивость (включением погрешности вычислений) отдельных схем, применяемых для решения уравнения колебаний,

$$\frac{du}{dt} = i\omega u. \quad (115)$$

В работах [18, 19] приводится сравнительное описание различных схем, основанное на применении их для решения уравнения (115). В этом подпункте мы построим и проанализируем комбинированные схемы, которые сохраняют положительные свойства отдельных схем. Аналитическое решение уравнения (115) есть, конечно,

$$u(t) = u_0 \exp(i\omega t).$$

Конечно-разностное решение уравнения (115) должно как можно лучше соответствовать аналитическому решению в виде колебания с постоянной амплитудой. Мы получили комбинированные разностные схемы, которые сохраняют почти постоянную амплитуду и приемлемую погрешность в фазе.

Второй проблемой являются ликвидация или ослабление вычислительных мод, которые возникают всегда, когда разностная схема имеет более высокий порядок точности, чем порядок дифференциального уравнения. При определенных условиях наши уравнения подвергаются воздействию особенно сильной неустойчивости из-за нарастающих вычислительных мод. Этот вопрос обсуждается в следующем разделе. Ослабление вычислительных



мод является требованием к любой композиционной схеме, которую мы строим.

Схема «с перешагиванием» (LF), записанная для общего уравнения (114), для временных уровней, отмеченных верхними индексами, имеет вид

$$\frac{u^1 - u^{-1}}{2\Delta t} = F^0,$$

причем погрешность аппроксимации пропорциональна  $b^2$ . При получении решения конечно-разностного уравнения мы будем обычной методике [1], когда разностное решение  $u^n$  представляется в виде

$$u^n = \lambda^n u^0,$$

где величины  $\lambda$  носят название множителей роста. Таким образом схема «с перешагиванием» записывается для уравнения в виде

$$u^n - u^{-1} = 2ibn^0,$$

где  $b = \omega\Delta t$ ; характеристическое уравнение дает

$$\lambda = ib \pm (1 - b^2)^{1/2},$$

причем  $\lambda_+$  соответствует истинной моде, а  $\lambda_-$  — погрешности числительной моде. Заметим, что  $|\lambda_+| = 1$ , если  $b^2 \leq 1$ . Очевидно, что истинная мода не содержит погрешности в амплитуде. Вычислительная мода в этом случае не нарастает и затухает. К сожалению, схема «с перешагиванием» подвержена сильной вычислительной неустойчивости, когда используем наших уравнений, и ее пришлось отвергнуть.

Схема Адамса — Башфорта (AB) в применении к уравнению (114) имеет вид

$$\frac{u^1 - u^0}{\Delta t} = \frac{3}{2}F^0 - \frac{1}{2}F^{-1},$$

и погрешность аппроксимации также пропорциональна  $b^2$ . Записывая эту схему для уравнения (115), мы получаем

$$u^1 - u^0 = \frac{3}{2}ibn^0 - \frac{1}{2}ibu^{-1},$$

что приводит к дисперсионному уравнению

$$\lambda^2 - \lambda \left(1 + \frac{3}{2}ib\right) + \frac{1}{2}ib = 0.$$

Когда  $b \ll 1$ , оно дает

$$|\lambda_+| = 1 + O(b^4) + \dots,$$

т. е. небольшое нарастание истинной моды, и

$$|\lambda_-| = \frac{b}{2} \ll 1,$$

т. е. сильное затухание вычислительной моды. Нарастание истинной моды может оказаться неприемлемым при большом времени вычисления.

Комбинированные схемы, в которых используются различные комбинации одношаговых схем для полного шага по времени, исследовались по отношению к уравнению (115). Требовалось получить частичную компенсацию погрешностей аппроксимации и подавить вычислительные моды. Суммарный эффект, однако, является более тонким, чем простое сложение погрешностей противоположного «знака». Например, в применении к уравнению (115) схема «с перешагиванием» (нет роста) + схема Адамса — Башфорта (медленный рост) дают вместе медленное затухание.

Подробности анализа устойчивости комбинированных схем можно найти в работе Байерса [20]. Было проанализировано много различных комбинированных схем и открыто несколько превосходных схем. В качестве примера получаемых улучшений сравним схему Адамса — Башфорта с комбинированной схемой LF AB AB, т. е. схемой, использующей «перешагивание» для 1-го, 4-го и т. д. шагов по времени и схему Адамса — Башфорта для 2-го, 3-го, 5-го, 6-го и т. д. шагов по времени. Мы сравнили квадрат амплитуды,  $R^2$ , в момент времени  $nt = 50,0$ , т. е. после примерно восьми полных волновых периодов. Если  $b = 0,2$ , то для схемы Адамса — Башфорта в этот момент  $R^2 = 1,24$ , а для комбинированной схемы  $R^2 = 0,99$ . Таким образом, видно, что схема Адамса — Башфорта увеличивает энергию волны на 24%, тогда как комбинированная схема уменьшает энергию волны всего на 1%.

Может показаться, что простому уравнению (115) придается слишком большое значение, так как в действительности наша вычислительная процедура не содержит решения этого уравнения. Но поскольку мы ожидаем много осцилляций или решений волнового типа, проведенный анализ и наша задача должны находиться в согласии, по крайней мере качественно. Некоторые схемы были опробованы в нашей программе, когда последний анализ предсказывал простое осциллирующее решение. Схемы с преобладающим «перешагиванием» оказались неустойчивыми из-за нарастающих вычислительных мод, что будет обсуждаться в следующем подпункте. Другие схемы оказались устойчивыми и вычислительным модам, и во всех случаях было хорошее количественное согласие предсказаний анализа и результатов. (Большинство схем было испытано до того, как был предпринят их анализ. Относительно большие затухания и усиление подвергались анализу.)

г. Разностно-временная неустойчивость из-за вычислительных мо-

Хорошо известно, что схема «с перешагиванием» неустойчива для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega u.$$

В этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2b\lambda - 1 = 0, \text{ где } b = \omega\Delta t,$$

откуда

$$\lambda_{\pm} = -b \pm (1 + b^2)^{1/2}.$$

Заметим, что  $|\lambda_{-}| > 1$ , поэтому вычислительная мода нарастает и вскоре по своей величине превосходит решение. Сопоставим это со схемой Адамса — Вайнфорта, для которой характеристическое уравнение записывается в виде

$$\lambda^2 - \lambda \left(1 - \frac{3}{2}b\right) - \frac{1}{2}b = 0,$$

или

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}b\right) \pm \frac{1}{2} \left(1 - b + \frac{9}{4}b^2\right)^{1/2},$$

и заметим, что  $|\lambda_{-}| \ll 1$  для малых  $b$ . Это означает, что исполнение схемы Адамса — Вайнфорта приводит к сильному затуханию вычислительной моды.

Для наших уравнений существует опасность появления неустойчивости из-за нарастающих вычислительных мод при использовании схемы «с перешагиванием» или комбинированной схемы, в которой «перешагивание» преобладает. Пользуясь методом, описанным Рихтмайером и Мерсоном [4], легко сформулировать проблему полного анализа устойчивости задачи в целом, а решение ее затруднительно. Наклучший результат для большинства сложных систем достигается с помощью разбиения системы на отдельные части, после чего определяются условия устойчивости каждой подсистемы. Хотелось бы надеяться, что суперпозиция таких отдельных условий устойчивости будет точным условием устойчивости всей системы. В дальнейшем использовать именно этот метод. (Стоит, однако, упомянуть, что Касахара [24] привел пример, когда подобная процедура разбиения на подсистемы оказалась непригодной.)

В рассматриваемой задаче неустойчивость обусловлена малыми скорости ионов, связанным с поляризационным дрейфом. В связи с этим мы пренебрегаем остальными членами и используем систему, которая является разумным приближением реальной системы.

Занимая плотность зарядов в виде

$$\rho_i = e n_i, \quad \rho_e = -e n_e, \quad \rho = \rho_i + \rho_e = e(n_i - n_e), \quad (116)$$

получаем из (114), (112) и (116) уравнение для полной плотности заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -e \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e). \quad (117)$$

Для примера будем считать, что полный ток образуется только за счет разности скоростей ионов и электронов, что дает нам право положить

$$n_i \approx n_e = n.$$

Разность  $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$  состоит из  $v_g$  ( $\sim mg \times B$ ) и  $v_p$  ( $\sim m dE/dt$ ). Поскольку  $v$   $dE/dt$  наибольшие затруднения связаны с членом  $\partial E/dt$ , мы оставим  $v_p \sim m (\partial E/dt)$  и отбросим  $v_g$  (обычный дрейф  $v_g \ll v_p$ ). Таким образом, приближенно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \frac{nm_i}{B^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \dots \quad (118)$$

Подставляя  $-e_0 \nabla^2 \varphi$  вместо  $\rho$ ,  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$  и раскрывая выражение для дивергенции, мы получаем уравнение, куда входят  $n$  и  $\varphi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi) = -\frac{nm_i}{e_0 B^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \varphi) \right] - \frac{m}{e_0 B^2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \varphi) \cdot \nabla n \right] + \dots \quad (119)$$

В процессе решения мы вычленим правую часть на предыдущем и текущем временных слоях и используем полученные величины для определения последующих значений. Как будет показано ниже, подробности зависят от выбора разностной схемы. Два члена, содержащие  $\partial (\nabla^2 \varphi)/\partial t$ , не обделяются, так как в нашей двухточечной модели это уравнение не решается явно.

Для простоты предположим, что  $n$  является переменной нулевого порядка и что  $\varphi$  зависит только от одной координаты  $x_j = j\Delta x$ . Аппроксимирем  $\nabla \varphi$  двухточечным выражением  $(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})/(2\Delta x)$ , а  $\nabla^2 \varphi$  — трехточечным выражением  $(\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})/\Delta x^2$ . Пусть далее  $\varphi$  задано фурье-разложением

$$\varphi(x) = \varphi(j\Delta x) = \sum_k \varphi^h \exp(ik_j \Delta x). \quad (120)$$

Тогда для фиксированного  $k$  из уравнения (119) следует

$$\frac{\partial \varphi^h}{\partial t} = \frac{nm_i}{e_0 B^2} \left\{ -1 + \left( \frac{iVn}{kn} \right) \left( \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right) \left[ \frac{k\Delta x/2}{\sin(k\Delta x/2)} \right]^2 \right\} \frac{\partial \varphi^h}{\partial t} + \dots \quad (121)$$

или

$$\frac{\partial \varphi^h}{\partial t} = (-K + iKD) \frac{\partial \varphi^h}{\partial t} + \dots \quad (122)$$

где

$$D = \frac{Vn}{kn} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \left[ \frac{k\Delta x/2}{\sin(k\Delta x/2)} \right]^2.$$

В правой части можно использовать предыдущий и текущий моменты времени, в левой части — предыдущий, текущий и последующий.

Схема с «перешагиванием» дает уравнение (индекс функции разложения  $k$  опущен)

$$\psi^1 - \psi^{-1} = (-2K + 2iKD)(\psi^0 - \psi^{-1}),$$

в правой части которого используются прошедший и текущий моменты времени, а в левой — прошедший и будущий моменты. Если положить

$$S = -2K + 2iKD,$$

то характеристическое уравнение примет вид

$$\lambda^2 - S\lambda - (1 - S) = 0.$$

Физическому решению отвечает корень

$$\lambda_+ = 1,$$

а корень, соответствующий неустойчивой вычислительной моды равен

$$\lambda_- = -1 + S, \text{ причем } |\lambda_-|^2 = 1 + 4K + 4K^2 + 4K^2 D^2 > 1.$$

Строгое неравенство выполнено, так как  $K = nm_i/v_0 B^2$ . Таким образом, эта мода оказывается безусловно неустойчивой.

Разностная аппроксимация по схеме Адамса — Башфорта

$$\psi^1 - \psi^0 = \frac{1}{2} S \left[ \frac{3}{2} (\psi^0 - \psi^{-1}) - \frac{1}{2} (\psi^{-1} - \psi^{-2}) \right],$$

и характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^2 - \lambda^2 \left( 1 + \frac{3}{4} S \right) + \lambda S - \frac{1}{4} S = 0.$$

В этом случае физическому решению отвечает корень  $\lambda = 1$ , а внешне

$$\lambda^2 - \frac{3}{4} \lambda S + \frac{1}{4} S = 0$$

определяет два корня, ответственных за вычислительные моды. Если  $D$  пренебрежимо мало, то при  $K = 0,5$  для одной из мод выполнено предельное условие устойчивости  $|\lambda| = 1$ ; для другой моды  $|\lambda| = 0,25$ , и, следовательно, она затухает.

Комбинированные схемы устойчивы для  $K < 1$ , если в них не преобладает «перешагивание». Вообще схемы с преимущественным использованием «перешагивания» хуже поддаются стабилизации, т. е. чем больше вклад схемы с «перешагиванием» в комбинированную схему, тем хуже для такой схемы значение  $K$ , обеспечивающее устойчивость. Комбинированные схемы, в которых «перешагивание» преобладает, устойчивы лишь при  $K \ll 1$ .

Необходимо сделать некоторые замечания относительно возможных значений коэффициента  $D$  [см. (122)]. Тригонометрическая функция изменяется между 1,0 и 0,0 при возрастании  $k\Delta x$  от 0 до  $\pi$ , причем нижняя граница  $\lambda = 2\Delta x$  определяется условием разрывности на пространственной сетке. Множитель  $Vn/kv_i$  приблизительно равен  $1/k\delta$ , где  $\delta$  — толщина пограничного слоя. При малых  $k$ , т. е. больших длинах волн, здесь возникают определенные трудности. Действительно, если  $k$  мало, то даже схема Адамса — Башфорта может стать неустойчивой из-за некоторого длинноволнового воздействия поляризационного дрейфа на электростатическое поле. Источник неприятностей заключен в разностном аналоге оператора Лапласа  $\nabla^2$ . Подобные проблемы возникали и в предшествующих исследованиях устойчивости [22], где было отмечено, что длинноволновые явления, по-видимому, не вызывают вычислительных последствий. В продолженных расчетах мы не обнаружили неустойчивости, которую нельзя было бы предсказать, основываясь на предположении, что  $D < 1$ .

Если условие  $K \ll 1$  не выполнено, то существует дополнительное затухание физической моды, обусловленное неточностью принятой разностной схемы для  $\partial\psi/\partial t$  при  $t = 0$ , так как аппроксимация  $(\psi^0 - \psi^{-1})/\Delta t$  имеет погрешность  $\sim \partial^2\psi/\partial t^2$ . Это затухание уменьшается с уменьшением  $\omega\Delta t$ , но при  $\omega\Delta t = 0,3$  оно еще достаточно велико, если  $K \sim 1$ . Более точное разностное выражение имеет вид

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \frac{3}{2} \psi^0 - 2\psi^{-1} + \frac{1}{2} \psi^{-2} \right),$$

но использование большего числа временных слоев вносит дополнительные вычислительные моды, которые могут привести к более жестким условиям устойчивости. Например, схема с «перешагиванием», использующая это уточненное выражение для  $\partial\psi/\partial t$ , становится еще более неустойчивой, а схема Адамса — Башфорта допускает значение  $K$ , равное лишь половине полученного ранее для границы устойчивости.

Таким образом, при  $K < 1$  можно разработать различные устойчивые разностные схемы для поляризационного члена. Однако данная ситуация не вполне удовлетворительна, так как хотелось бы иметь такие схемы для любого  $K$  в области от  $K \ll 1$  до  $K \gg 1$ . В следующем подпункте описана модификация рассматриваемой модели для случая  $K > 1$ .

## л. Опшибка округления; одножидкостная модель

Вместе мы покавали, что затрудення, связанные с вычтальной модой в вышей двухжидкостной модели, обусловлены поляризационной скоростью ионов  $v_p = m_i / (eE^2) (dE/dt)$ , в рая является реакцией плазмы на изменение поля  $E$ . Чем больше величина  $K = n_i m_i / \epsilon_0 E^2$ , тем сильнее плазма отзывается изменения  $E$ . С увеличением  $K$  до больших значений результоуе разделение зарядов становится очень малым ( $n_+ - n_-$ ). Даже если двухжидкостная модель численно устойчива, все но при  $K \gg 1$  будет происходить возрастание ошибок округле связанные с вычислением разности приблизительно равных числ.

Для того чтобы устранить как ошибки округления, так и ленную неустойчивость, свойственные двухжидкостной моде, перейдем от двухжидкостного описания к одножидкостному. Вместо раздельного рассмотрения электронной и ионной жасей введем нейтральную жидкость ( $n = n_+ \approx n_-$ ) и заряженную жидкость ( $n_c = n_+ - n_-$ ) и будем учитывать только  $E/B$ -др остальные виды дрейфа ионов,  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$ , служат только для разннх зарядов. (Эти приближения означают, что справедливо все  $v_{\perp} \gg v_{\parallel}$ , которое обычно хорошо выполняется при  $K > 1$ .)

Можно найти изменение условия устойчивости вычисл. Уравнение (448) (дополненное членами, которые были опу в предшествующем рассмотрении) в случае одножидкостной модели решается явно, поэтому можно объединить слагаемые с  $V^2 \Phi$ , и писать уравнение (449) в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Phi) - \left(1 + \frac{nm}{\epsilon_0 E^2}\right)^{-1} \left(-\frac{m}{\epsilon_0 E^2}\right) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) \cdot \nabla n\right] + \dots$$

Уравнение (422) переходит в

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - i \frac{K}{1+K} D \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = i D' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \dots$$

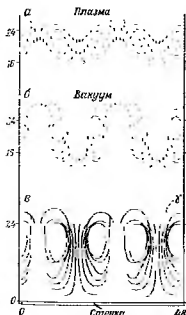
Условие устойчивости для схемы Адамса — Башфорта теперь в вид  $D' < 1/2$  и выполняется при любых значениях  $K$  (если все на  $D$  достаточно мало). Такая ситуация типична для многих бишированных схем. Схема ес перешагиваемь по-пре неустойчива (хотя и не так сильно), но комбинарованные о даже если в них «перешагивание» играет значительную роль, тут быт устойчивы.

В области  $K < 1$  одножидкостная модель может быть и зована для оценки ошибок округления, возникающих в жидкостной модели. Некоторые просчеты проводились как одножидкостной, так и для двухжидкостной моделей та

предлагались преимущественно одножидкостное поведение (преодоладать  $E/B$ -дрейфа). При этом существенной разницы не было обнаружено, что с определенностью указывает на незначительность ошибок округления в двухжидкостной модели.

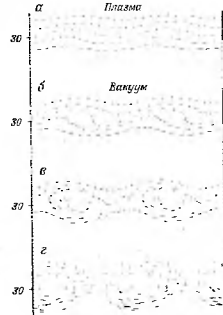
## е. Применения

В процессе вычислений проводился контроль электрической, магнетической и гравитационной энергий как функций времени



Фиг. 2. Развитие неустойчивости Рэлея — Тейлора.

Векторы скорости и выходы частиц показаны для двух случаев: а)  $t = 7,200$ ; б)  $t = 9,300$ ; в) фронтальная поверхность на шаг время расчета  $t = 12,075$  (тепл. четверть, которая  $\approx 24\lambda$  в вакуумной области  $y = 0$ ). Максимальная температура ионизованных нейтральных частиц в момент времени  $t = 11,775$ . Время  $t = 7,200$  приблизительно соответствует 5-кратному времени роста по линейной теории. Вушной  $y$  отмечена позиция макс. температуры зарядов, которая сьмьла вычисляется в первом ряду при  $(x, y) = (48\lambda, 46\lambda)$ . Третья четверть делится делами  $y = 0 \rightarrow 16\lambda$  ( $n = 0$  для  $y < 15\lambda$ , и  $n = 25\lambda$  ( $n = \text{макс.}$  для  $y > 25\lambda$ ).

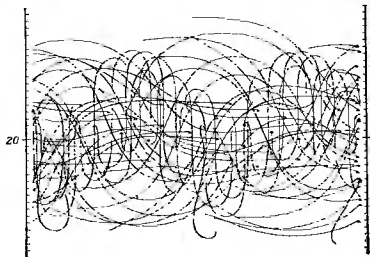


Фиг. 3. Развитие неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

Неустойчивости и векторы скорости отмечены частиц показаны для четырех различных моментов времени: а)  $13\lambda$ , б)  $30\lambda$ , в)  $60\lambda$ , г)  $120\lambda$ . Центр невращающегося слоя расположен при  $y = 30$ . Проволочная стенка находится на линии  $y = 0$ ,  $\Delta t \approx 0,5\lambda \cdot V_{\text{макс.}}$

и полной энергии, которая должна сохраняться. Графики энтропии позволяют выявить равную стадию численных неустойчивостей.

Зависимость от времени пространственных фурье-компонент (зависимость от  $x$  предполагается периодической) полезна для детального понимания и для разработки нелинейной теории. Фиг. 4.



Фиг. 4. Двухданный желобок.

Для отдельных мечащих иониче и электрониче траектории, приближенные к вехе времени расчета. Двеи графиками изображены тот же, как и застрочен, легко отличить по большой амплитуде  $v/v_{Te}$  смещении в отрицательном направлении.

За все время расчета ионы могли переместиться на расстояние, несколько большее поперечный сечение, выходя равна двум диаметрам иониче. Движение по иониче в направлении  $x$  и  $y$  и электрониче обусловлено  $E \times B$ -дрейфом. Маленькие триггеры показываю начально распределение меченых частиц. Центр поперечного сечения иониче при  $y = 2l$ . Можно заметить, что амплитуда неустойчивости возрастает по времени (расположенной на линии  $y = 0$ ), а затем медленно уменьшается и прекращается вычисления.

амплитуды для  $p = e(n_i - n_e)$  и  $\psi^h(y)$ ,  $\psi^e(y)$  определены в процессе вычисления потенциала. Таким образом, не требуются дополнительных расчетов.

Сначала основной целью состояла в изучении развития ранних неустойчивостей поперечного сечения от больших амплитуд. При этом особенно желательно было отделить те неустойчивости, которые достигают насыщения, т. е. когда плазма остается странно ограниченной, от неустойчивостей, выталкивающих плазму на стенку, когда плазма не удерживается. Первые расчеты показали, что развитие неустойчивости Рэлея — Тея нарушает удержание, а развитие неустойчивости Кельве

Гельмгольца не нарушает, — и то и другое относится к случаю малых плотностей,  $K \ll 1$  [43]. Дальнейшее развитие связано с графиками меченых частиц, на которых эти частицы показаны точками с направленными вперед хвостами, изображающими векторы скорости. Были получены моментальные снимки и местоположения во времени, или графики траекторий. Меченые частицы — это воображаемые частицы, которые помещаются (обычно односторонне) в плазму и движутся с локальной скоростью, равной  $E \times B$ . Результаты приведены в работах Байерса [43, 44, 20].

На фиг. 2, 3, 4 приведено несколько типичных кадров и графиков местоположения, показывающих иониче и электрониче траектории для выбранных меченых частиц.

Благодарности. Джон Килкин выражает благодарность г-не Шерли Рошезе, д-ру Артуру Х. Фатчу (младшему) и м-ру Роберту П. Фрайсу, участвовавшим в работе по применению изображений в настоящей работе методов к решению задач ядерного синтеза.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Richtmyer R. D., Morton K. W., Difference Methods for Initial Value Problems, New York, 1967. (См. перевод: Р. Ризмайер, К. Мортон, Разностные методы решения краевых задач, изд-во «Мир», 1972.)
2. Killeen J., Neal F. K., Heckrote W., в книге Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Vol. II, IAEA, Vienna, 1966, p. 227.
3. Bretschneider M., Weiss P. B., Bull. Am. Phys. Soc., 13, 4532 (1968).
4. Killeen J., Rempel E. L., Journ. Comput. Phys., 1, 29 (1966).
5. Kellogg P. J., Phys. Fluids, 8, 102 (1965).
6. Leith C. E., Meth. Comput. Phys., 4, 4 (1965).
7. Futch A. H., Jr., Dann C. C., Foote J. R., Freis R., Cardon, F. J., Hunt A. H., Killeen J., Moses K. G., Post R. F., Steinhauser J. F. [2], p. 3.
8. Kuo L. G., Murphy E. C., Petricic M., Sweetman D. R., Phys. Fluids, 7, 988 (1964).
9. Futch A. H., Jr., Heckrote W., Dann C. C., Killeen J., Mish L. E., Phys. Fluids, 5, 1277 (1962).
10. Northrop T. G., The Adiabatic Motion of Charged Particles, New York, 1963.
11. Chandrasekhar S., Plasma Physics, Chicago, Ill., 1960.
12. Rosenbluth M. N., Simon A., Phys. Fluids, 8, 1300 (1965).
13. Egers J. A., Phys. Fluids, 9, 1438 (1966).
14. Egers J. A., Phys. Fluids, 10, 2235 (1967).
15. Rosenbluth M. N., Longiare C. L., Ann. Phys., 1, 130 (1957).
16. Hackney R. W., Phys. Fluids, 9, 1826 (1966).
17. Phillips N. A., The Atmosphere and Sea in Motion, New York, 1959, pp. 504—504.
18. Lilly D. K., Monthly Weather Rev., 93, 11 (1965).
19. Kurokawa J., Monthly Weather Rev., 93, 33 (1965).
20. Egers J. A., Journ. Comput. Phys., 1, 496 (1967).
21. Kawabata T., Monthly Weather Rev., 93, 27 (1965).
22. Charney J. G., Fjortoft R., von Neumann J., Tellus, 2, 237 (1950).

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ГАМЛЬТОНА К АНАЛИЗУ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ВЛАСОВА

*X. Льюис\**

## § 1. Введение

Задача конструктивного математического моделирования процессов в высокотемпературной плазме всегда вызывает огромный интерес, особенно в области исследований по управлению термоядерному синтезу<sup>1</sup>). Если температура достаточно высока, можно использовать аппроксимацию, предложенную Власовым согласно которой каждый тип частиц описывается с помощью высшей от времени функции распределения. Эти функции распределения зависят от координат и скоростей в одночастичном фазовом пространстве и удовлетворяют бесстолкновительным уравнениям Больцмана, в которых электромагнитное поле, связанное частицами, аппроксимируется так называемым «согласованным» полем. Другой, полностью эквивалентный способ описания движения частиц — задание траекторий точек каждого типа частиц в одночастичном фазовом пространстве. Эти траектории, являющиеся характеристическими кривыми уравнений Больцмана, — решения одночастичных уравнений движения, которые удовлетворяются для каждой частицы, обусловленные частицами электромагнитное поле заменить «согласованным» полем. Этот второй метод описания движения частицы, заключающийся в определении траекторий частиц с помощью функций распределения, используется все шире, особенно в численных расчетах.

В этой главе в рамках основанного на траекторных подходе разовьем общий метод построения аппроксимационных расчетов. Этот метод основан на описании плазмы в приближении Власова с помощью точного лагранжиана. Функции, которые должны быть определены при использовании лагранжиана Власова, — это скалярный и векторный потенциалы  $\phi(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , зависящие от координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ , и функции  $\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', t)$ , описывающие траектории частиц в зависимости от начальных

\* H. Ralph Lewis, University of California, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico.

<sup>1</sup> Обзор недавних работ по этому направлению исследований можно найти в трудах конференции [4].

условий и времени<sup>1</sup>). Векторы  $\mathbf{r} = \mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  и  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  определяют соответственно положение и скорость частицы типа  $k$ , у которой начальное положение и скорость равны соответственно  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$ . Точка над символом означает дифференцирование по времени. Мы рассмотрим произвольные аппроксимации этих функций, которые можно построить с помощью параметров, зависящих от времени. Например, скалярный потенциал  $\phi(\mathbf{r}, t)$  можно задать его значениями от времени значениями в узлах некоторой конечной пространственной сетки. Для определения же потенциала в точках между узлами можно использовать интерполяцию. В более общем случае, который включает рассмотренный выше, потенциал  $\phi(\mathbf{r}, t)$  аппроксимируется суммой линейно независимых функций координат с коэффициентами, зависящими от времени. Зависимость аппроксимации потенциала  $\phi(\mathbf{r}, t)$  от параметров, которые в свою очередь зависят от времени, также может быть сильно нелинейной. В самом общем случае мы допустим любые аппроксимации  $\phi(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  следующего вида:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &\approx \Phi[\mathbf{r}, t, \{\alpha_n(t)\}], \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\approx \mathcal{A}[\mathbf{r}, t, \{\beta_m(t)\}], \\ \mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) &\approx \mathcal{R}_k[\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_l(t)\}],\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$  — произвольно выбранные функции, а зависимость от времени параметров  $\alpha_n(t)$ ,  $\beta_m(t)$  и  $\gamma_l(t)$  должна быть определена.

После выбора функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$  необходимо еще выбрать принцип, который позволит нас определить, как параметры зависят от времени. Для одних и тех же точных уравнений движения, используя различные принципы, почти всегда можно вывести бесконечно много систем уравнений для зависящих от времени параметров. Наш подход состоит в том, чтобы для выбора одной из этих возможных систем уравнений использовать вариационный принцип Гамильтона. Если использовать принцип Гамильтона, то система уравнений будет единственной. Ее можно получить, если выражения (1) подставить в точный лагранжиан и затем удовлетворить вариационному принципу только для таких вариаций  $\phi$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{R}_k$ , которые возможны при данной аппроксимации. Единственная разница между выводом точных уравнений и выводом уравнений для зависящих от времени параметров в том, что во втором случае варьирование проводится в ограниченном классе функций. Эти уравнения для параметров в некотором отношении должны быть оптимальными.

<sup>1</sup> Несколько отличающийся подход, в котором электромагнитные потенциалы с самого начала исключаются из-за преобразования эффектами галилеевскими, развивал Максвелл [2].

Важное следствие вывода уравнений для параметров в численном методе — строгая теорема энергии для этих уравнений, которая будет справедливой независимо от конкретного вида функции  $\Phi$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}_0$ . Например, если эти функции не зависят от времени и если система консервативна, то из уравнений для параметров следует точное сохранение энергии.

Из-за сложности поведения плазмы в приближении Власова желательна большая свобода выбора функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}_0$ . Эти функции должны выбираться так, чтобы отразить основные или интуитивные представления о самых важных особенностях плазмы, характерные для решаемой задачи; они должны модифицироваться по мере накопления информации или обострения ситуации. При каждом выборе из вариационного принципа следует единственная система уравнений для параметров. К тому, вариационный принцип можно видоизменить так, чтобы учитывать дополнительные приближения, которые можно сделать в конкретной физической задаче. Большая общность в выборе подхода — ценное свойство для численного решения задач, возникающих при экспериментальных исследованиях.

В простейшем случае применения принципа Гамильтона к ансамблю частиц, характерный для приближения Власова, аппроксимируется конечным числом частиц, а потенциалы — некоторым классом непрерывных функций. Некоторые аппроксимационные схемы, получающиеся таким образом, тесно связаны с находящимися постоянно в употреблении численными методами. Например, пренебрежь магнитным полем, а для скалярного потенциала использовать кусочно-билинейную аппроксимацию, то для него можно получить формулу конечных разностей, которая включает процедуру учета «весов» для областей, используемых в расчетах типа «частицы в ячейке» (PIC или CIC) [3—5]. В случае из принципа Гамильтона следует специфическая равновесная схема для уравнения Пуассона и специфический метод равновесного поля, обеспечивающий выполнение сохранения энергии. Вариационный подход для системы с очень большим числом частиц непосредственно применим в трехмерном случае с полными уравнениями Максвелла и внешними полями. Таким образом, можно вывести класс схем, которые будут основными методами «частицы в ячейке», учитывающими закон сохранения энергии.

Принцип Гамильтона применим и к задачам, в которых нужно приближенно описывается конечным числом параметров. Частный пример такого рода рассматривался в работе 1. В этом примере следует использовать двухточечную неустойчивую нелинейную температурную. По-видимому, из этого исследования можно получить полуаналитическое описание асимптотически устойчивого типа неустойчивости. Вероятно, наиболее

интересная сторона вариационного метода — это возможность ответить на вопрос, как эффективно описать континуум частиц малым числом параметров.

Принципы Гамильтона можно применить к численному анализу процессов в плазме в приближении Власова, когда частицы характеризуются их траекториями. Можно рассмотреть случай конечного или бесконечного числа частиц. Для оценки перспективности метода мы кратко сравним его с методами, в которых фигурируют зависящие от времени функции распределения.

Основная трудность, с которой приходится сталкиваться при расчетах характеристик плазмы в приближении Власова, когда частицы описываются с помощью зависящих от времени функций распределения, состоит в следующем: линии уровня функции распределения имеют тенденцию с течением времени все более закручиваться в фазовом пространстве, если в начальный момент времени плазма неустойчива. Этот эффект — самое жесткое ограничение на применимость метода, в котором используются функции распределения, зависящие от времени, — будь то схема вычисления конечных разностей для уравнения Больцмана, метод «разомкнутый» (гл. 2) или модель «сводного мешка» (гл. 3).

(В модели «сводного мешка» используются зависящие от времени функции распределения, даже если движение границ в фазовом пространстве рассчитывается из уравнений движения частиц.) Важнейшая причина, почему применяются различные методы траекторий, состоит в том, что описание частиц их траекториями, сильно отличающееся в деталях от использования функций распределения, дает возможность применять численные методы для более длительных промежутков времени.

Между вариационными принципами и методами, в которых функции распределения представляются линейными комбинациями конечного числа базисных функций от координат и скорости с коэффициентами, зависящими от времени, имеется шестое сходство. Это сходство — в общем методе параметризации временных зависимостей. Однако на этом оно и кончается. В случае вариационного принципа мы параметризуем не функции распределения, а решение уравнений движения частиц как функции начальных условий и времени. Оба подхода эквивалентны, если каждый осуществится точно.

В § 2 мы подробно опишем метод Лагранжа в применении к плазме в приближении Власова. Описание содержит возможность учета электромагнитных потенциалов, которые могут зависеть от скорости. Оно также содержит описание сред, которые могут обладать нелинейной поляризуемостью и магнитной вязкостью. Хотя в принципе особые явления, которые могут возникнуть в плазме с учетом нелинейности среды, не обсуждаются, возможны интересные применения при численном анализе нелинейных

оптических явлений. Вывод аппроксимационной схемы из принципа Гамильтона приводится в § 3. Мы рассмотрим два метода Лагранжа и метод Гамильтона, и получим теорему о энергии и тем самым метод для рассмотрения конечного числа частиц и тем самым получим различные сохраняющие энергии обобщения метода частиц в ячейке. Приложение вариационного метода к исследованию двухпоточковой неустойчивости при различных температурах в случае бесконечного числа частиц мы опишем

## § 2. Описание физической системы методом Лагранжа

### 1. Физическая система

Рассмотрим плазму, состоящую из частиц  $N$  типов, и обозначим массу и заряд частиц типа  $k$  через  $M_k$  и  $Q_k$  соответственно. Частичную функцию распределения для частиц типа  $k$  в фазовом пространстве  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  обозначим через  $f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и нормируем полное число частиц типа  $k$ . Частицы движутся в самосогласованном электромагнитном поле и, возможно, в обобщенном электромагнитном поле, потенциал которого для частиц типа  $k$  обозначим через  $U_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Мы также допускаем возможное существование внешних зарядов  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$ . Плотные плотности зарядов  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и токов  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  будем выражать

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}, t) + \sum_{k=1}^N Q_k \int d^3v f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) + \sum_{k=1}^N Q_k \int d^3v \mathbf{v} f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t).$$

Сила  $\mathbf{F}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ , действующая на частицу типа  $k$ , положение и скорость которой определяются в момент времени  $t$  векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , есть сила Лоренца плюс сила, представляемая обобщенным потенциалом  $U_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ :

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q_k \left[ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right] - \nabla_{\mathbf{r}} U_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{d}{dt} \nabla_{\mathbf{v}} U_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле и  $c$  — скорость света. Точные выражения градиентов по переменным действующих на функцию от  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , приведены в приложении

Радиус-вектор частицы типа  $k$ , начальное положение и скорость которой равны соответственно  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$ , будем обозначать как  $\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$ . Ради простоты мы часто будем опускать аргументы у этой функции. Она удовлетворяет обычному релятивистскому уравнению движения

$$M_k \ddot{\mathbf{R}}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) = \mathbf{r}' \quad (5a)$$

и

$$\dot{\mathbf{R}}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) = \mathbf{v}'. \quad (5b)$$

Точкой всегда мы будем обозначать дифференцирование по времени  $t$ :

$$\dot{\mathbf{R}}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t).$$

Если число начальных условий бесконечно, то уравнение движения для  $\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  соответствует бесстолкновительному уравнению Больцмана для  $f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ :

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_k + \frac{1}{M_k} \mathbf{F}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_k = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) эквивалентно уравнению (4), так как решения уравнения (4) — характеристические кривые уравнения (6). Если написать обратные соотношения для уравнений

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \quad (7a)$$

и

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \quad (7b)$$

в виде

$$\mathbf{r}' = \mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (8a)$$

и

$$\mathbf{v}' = \mathbf{F}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (8b)$$

то  $f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  можно будет выразить следующим образом:

$$f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_k[\mathbf{G}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \mathbf{F}_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), 0]. \quad (9)$$

Аппроксимация, при использовании которой процессы в плазме описываются с помощью одночастичных функций распределения, подобных рассмотренной выше, известна как приближение Власова.

В нашем описании электромагнитного поля мы будем рассматривать определенный класс сред, которые могут обладать нелинейными поляризуемостью и немагнитичностью. Оказывается, что



при этом не возникнет трудностей, если использовать вариационный принцип. Это также может быть полезно для некоторых задач нелинейной оптики. Рассмотрение такого класса сред имеет применение и в физике плазмы, хотя мы и не предлагаем ничего конкретного. Чтобы рассматривать поляризуемые и намагничиваемые среды, мы запишем уравнения Максвелла в

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}.\end{aligned}$$

Векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  определяются скалярными функциями  $\psi(\mathbf{r}, t)$  и  $\chi(\mathbf{B}, \mathbf{r}, t)$  с помощью формул

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \nabla \psi(\mathbf{E}, \mathbf{r}, t)$$

и

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 4\pi \nabla \chi(\mathbf{B}, \mathbf{r}, t).$$

Векторы  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$  зависят от  $\mathbf{r}$  и  $t$  не только, через зависимость от  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Кроме этой нелинейной зависимости, допускается также зависимость от  $\mathbf{r}$  и  $t$ . Функции  $\psi$  и  $\chi$  могут быть полезны, природа и распределение поляризуемой и намагничиваемой изменяются в пространстве и времени. Обычно в области могут быть частицы, мы будем использовать

$$\psi = \frac{1}{8\pi} E^2 \quad \text{и} \quad \chi = \frac{1}{8\pi} B^2.$$

так что

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Скалярный и векторный потенциалы,  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , мы стандартизируем:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}$$

и

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

В этом случае уравнения (10) удовлетворяются автомат-

## 2. Вывод точных уравнений из принципа Гамильтона

Для конечного числа точечных частиц, которые взаимодействуют через электромагнитное поле, имеется точный лагранжиан для движения и частиц, и поля [17]. Лагранжиан, который мы будем использовать, — обобщение лагранжиана точечных частиц на случай непрерывных систем, которое учитывает возможность описания нелинейной среды и обобщения неэлектромагнитных потенциалов [8, 9]. Впервые на возможность описания плазмы в приближении Власова такой аппроксимацией лагранжиана для случая непрерывных систем указали Джо [10] и Старрок [11] в связи с анализом линеаризованных уравнений. Лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned}L = & \sum_{k=1}^N \int d^3r' d^3v' f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \left\{ \frac{1}{2} M_k \dot{\mathbf{R}}_k^2 - U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{c} Q_k \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}_k, t) \right\} + \int d^3r \left\{ \psi(\mathbf{E}, \mathbf{r}, t) - \chi(\mathbf{B}, \mathbf{r}, t) - \right. \\ & \left. - \rho_0(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right\}. \quad (16)\end{aligned}$$

В этой формуле ради простоты мы использовали запись  $\mathbf{R}_k$  вместо  $\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$ . В последующем, если аргументы у функции  $\mathbf{R}_k$  будут опущены, их следует иметь в виду. Интегрирование по  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$  выполняется по всей области изменения этих переменных. Интегрирование по  $\mathbf{r}$  производится по объему  $V$ , на границе которого должны быть заданы соответствующие граничные условия для электромагнитного поля. В объеме  $V$  должны находиться все частицы в течение всего рассматриваемого времени, т. е. вектор  $\mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  должен лежать внутри объема для всех значений  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$  в течение этого промежутка времени. Впрочем, если система обладает бесконечной периодической структурой, то можно модифицировать уравнение (16) таким образом, чтобы интегрировать по  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$  только внутри ячейки периодичности. Интеграл по ячейке периодичности не зависит от выбора ячейки, поэтому интегрирование по одной ячейке вместо интегрирования по всему объему изменяет лагранжиан лишь на несущественный численный множитель. Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  должны быть выражены через  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  на уравнениях (15).

Точные уравнения для физической системы могут быть выведены из принципа Гамильтона

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (17)$$

Функции  $\varphi$ ,  $A$  и  $R_k$  в (17) варьируются независимо,  $t_1$  и  $t_2$  произвольных момента времени. В этом пункте мы выведем уравнения из (17) и в процессе вывода определим, какие члены должны быть положены на вариациях функций  $\varphi$ ,  $A$ .

Вариация интеграла от лагранжиана по  $R_k$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta_{R_k} \int_{t_1}^{t_2} L dt = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r d^3v f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) \left\{ \left[ -\nabla_{R_k} U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) - \right. \right. \\ & \left. \left. - Q_k \nabla_{R_k} \varphi(\mathbf{R}_k, t) + \frac{1}{c} Q_k (\nabla_{R_k} A(\mathbf{R}_k, t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k \right] \cdot \delta \mathbf{R}_k + \right. \\ & \left. + \left[ M_k \dot{\mathbf{R}}_k - \nabla_{R_k} U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) + \frac{1}{c} Q_k A(\mathbf{R}_k, t) \right] \cdot \delta \dot{\mathbf{R}}_k \right\} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r d^3v f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) \left\{ -M_k \ddot{\mathbf{R}}_k - \nabla_{R_k} U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) \right. \\ & \left. + \frac{d}{dt} \nabla_{R_k} U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) - Q_k \nabla_{R_k} \varphi(\mathbf{R}_k, t) - \frac{1}{c} Q_k \dot{A}(\mathbf{R}_k, t) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c} Q_k [(\nabla_{R_k} A(\mathbf{R}_k, t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k - \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \nabla_{R_k} A(\mathbf{R}_k, t)] \right\} \cdot \delta \mathbf{R}_k + \\ & + \left\{ \left[ M_k \dot{\mathbf{R}}_k - \nabla_{R_k} U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) + \frac{1}{c} Q_k A(\mathbf{R}_k, t) \right] \cdot \delta \mathbf{R}_k \right\} \Big|_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Ограничим вариации по  $R_k$ , потребовав, чтобы они обращались в нуль при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ :

$$\delta \mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t_1) = \delta \mathbf{R}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t_2) = 0.$$

Это означает, что  $R_k$  варьируется в классе функций, которые совпадают при  $t = t_1$  и  $t = t_2$  с искомым решением. В результате этого ограничения часть выражения (18), представляющая вариацию для  $t_1$  и  $t_2$ , исчезает:

$$\left\{ \left[ M_k \dot{\mathbf{R}}_k - \nabla_{R_k} U_k(\mathbf{R}_k, \dot{\mathbf{R}}_k, t) + \frac{1}{c} Q_k A(\mathbf{R}_k, t) \right] \cdot \delta \mathbf{R}_k \right\} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Так как вариация (18) должна обращаться в нуль для произвольной  $\delta R_k$ , удовлетворяющей условию (19), то подынтегральное выражение в (18) также должно обращаться в нуль. Если принять нулю подынтегральное выражение (18) и воспользоваться векторным тождеством

$$(\nabla_{R_k} A(\mathbf{R}_k, t)) \cdot \dot{\mathbf{R}}_k - \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \nabla_{R_k} A(\mathbf{R}_k, t) = \dot{\mathbf{R}}_k \times (\nabla_{R_k} \times A(\mathbf{R}_k, t));$$

то получим уравнение движения частицы (4).

Вариация интеграла от лагранжиана по  $\varphi$  есть

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi} \int_{t_1}^{t_2} L dt = & - \sum_{k=1}^N \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r d^3v f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) Q_k \delta \varphi(\mathbf{R}_k, t) + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \{ -[\nabla_{\varphi} \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{r}, t)] \cdot \delta [\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)] - \rho_0(\mathbf{r}, t) \delta \varphi(\mathbf{r}, t) \}. \end{aligned} \quad (22)$$

В подынтегральном выражении  $k$ -го члена суммы в (22) перейдем от переменных  $\mathbf{r}'$  и  $\mathbf{v}'$  к переменным  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  в соответствии с (7) и (8). Можно показать, что якобиан этого преобразования равен единице. Используем также тождество (9). Тогда вариацию по  $\varphi$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi} \int_{t_1}^{t_2} L dt = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \left\{ - \left[ \sum_{k=1}^N Q_k \int d^3v f_k(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \right] \delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4\pi} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \delta [\nabla \varphi(\mathbf{r}, t)] - \rho_0(\mathbf{r}, t) \delta \varphi(\mathbf{r}, t) \right\} - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \left\{ -\rho(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right\} \delta \varphi(\mathbf{r}, t) - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{границы } V} dS \cdot [\delta \varphi(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Наложим теперь граничное условие

$$\int_{\text{границы } V} dS \cdot [\delta \varphi(\mathbf{r}, t) \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (24)$$

Один из способов удовлетворить этому граничному условию — положить  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  равным такому значению на границе  $V$ , чтобы на этой границе  $\delta \varphi(\mathbf{r}, t)$  была равна нулю. Так как выражение (23) должно обращаться в нуль для произвольной  $\delta \varphi$ , удовлетворяющей условию (24), то подынтегральное выражение в интеграле по объему тоже должно обращаться в нуль. Полученное таким образом уравнение есть одно из уравнений Максвелла, (11а).

Вариация интеграла от лагранжиана по  $A$  есть

$$\begin{aligned} \delta_A \int_{t_1}^{t_2} L dt = & \sum_{k=1}^N \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r d^3v f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) \frac{1}{c} Q_k \dot{\mathbf{R}}_k \cdot \delta A(\mathbf{R}_k, t) + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \left\{ -\frac{1}{c} [\nabla_{\varphi} \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{r}, t)] \cdot \delta [\dot{A}(\mathbf{r}, t)] - \right. \\ & \left. - [\nabla_{\mathbf{v}} \chi(\mathbf{B}, \mathbf{r}, t)] \cdot \delta [\nabla \times A(\mathbf{r}, t)] + \frac{1}{c} \mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t) \cdot \delta A(\mathbf{r}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Преобразуем интегралы, входящие в сумму в (25), таким образом, как и интегралы в (22). Тогда вариация по  $A$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \delta_A \int_{t_1}^{t_2} L dt = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \left\{ \frac{1}{c} \sum_{k=1}^N Q_k \int d^3v v f_k(r, v, t) \right\} \cdot \delta A(r, t) - \\ & - \frac{1}{4\pi c} \mathbf{D}(r, t) \cdot \delta \dot{A}(r, t) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H}(r, t) \cdot \delta [\nabla \times \mathbf{A}(r, t)] + \\ & + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{h}}_0(r, t) \cdot \delta \mathbf{A}(r, t) \Big\} = \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3r \left\{ \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}(r, t) + \frac{1}{4\pi c} \dot{\mathbf{D}}(r, t) - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H}(r, t) \right\} \cdot \delta \mathbf{A}(r, t) + \\ & - \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r \{ \mathbf{D}(r, t) \cdot \delta \mathbf{A}(r, t) \} \Big|_{t_1}^{t_2} - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{граница } V} dS \cdot [\delta \mathbf{A}(r, t) \times \mathbf{H}(r, t)]. \end{aligned}$$

Ограничим вариацию компонент  $\delta A$ , параллельной вектору потребован, чтобы она обращалась в нуль при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ .

$$\mathbf{D}(r, t_1) \cdot \delta \mathbf{A}(r, t_1) = \mathbf{D}(r, t_2) \cdot \delta \mathbf{A}(r, t_2) = 0.$$

Это означает, что  $A$  варьируется в классе функций, компонент которых вдоль  $\mathbf{D}$  совпадают с аналогичными компонентами того решения для  $A$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . В результате этого ограничения предпоследний член в (26) исчезает:

$$\mathbf{D}(r, t) \cdot \delta \mathbf{A}(r, t) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Положим также граничное условие

$$\int_{\text{граница } V} dS \cdot [\delta \mathbf{A}(r, t) \times \mathbf{H}(r, t)] = 0,$$

чтобы и последний член в (26) исчезал. Один из способов удовлетворить этому граничному условию — положить  $A(r, t)$  равным нулю на границе  $V$ , чтобы вариация  $\delta A(r, t)$  обращалась в нуль на этой границе. Однако так сильно ограничивать не приходится. Так как правая часть выражения (26) должна исчезать для произвольной вариации  $\delta A$ , удовлетворяющей условиям (27) и (28), то подынтегральное выражение интеграла по объему также должно исчезнуть. В результате получится для требуемое уравнение Максвелла (116).

Подытоживая, отметим, что из принципа Гамильтона следуют правильные уравнения для физической системы, вариации ограничены условиями (19), (24), (27) и (29).

### 3. Обуждение ограничений, накладываемых на вариации векторного потенциала

Мы будем рассматривать такие аппроксимационные схемы, в которых приходится выкладывать ограничения на все компоненты вариации вектора  $A(r, t)$ . Мы будем требовать, чтобы все эти компоненты обращались в нуль при  $t_1$  и  $t_2$ . Конечно, это намного более сильное ограничение, чем (27), которое было единственным ограничением, накладываемым на  $\delta A$ , при выводе точных уравнений из принципа Гамильтона. Сейчас мы покажем, что требование калибровочной инвариантности для электромагнитного поля позволяет потребовать обращения в нуль вариаций  $A(r, t)$  при  $t_1$  и  $t_2$  без потери общности.

Прежде всего заметим, что электромагнитные потенциалы используются только для расчета электрического и магнитного полей. Поэтому если варьируются потенциалы в лагранжиане, то варьироваться они должны в определенном классе функций. Последние должны удовлетворять граничным и начальным условиям, которые мы получили в предыдущем пункте, и из них должны выводиться все нулевые электрические и магнитные поля. Имеется множество таких классов функций, и все они связаны калибровочным преобразованием.

Вариации векторов  $E$  и  $H$ , которые следуют из вариаций  $\varphi$  и  $A$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \delta E(r, t) = & -\delta \nabla \varphi(r, t) - \frac{1}{c} \delta \left( \frac{\partial}{\partial t} A(r, t) \right) = \\ = & -\nabla \delta \varphi(r, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta A(r, t), \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\delta H(r, t) = \delta (\nabla \times A(r, t)) = \nabla \times \delta A(r, t). \quad (30b)$$

Начальные условия, согласно которым поле  $\mathbf{B}(r, t)$  должно быть единственным, эквивалентны фиксации  $\mathbf{B}(r, t)$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$ . Поэтому мы должны рассматривать только такие вариации, при которых  $\delta \mathbf{B}(r, t_1)$  и  $\delta \mathbf{B}(r, t_2)$  равны нулю. В этом случае из уравнения (30b) следует, что  $\delta A(r, t_1)$  и  $\delta A(r, t_2)$  — градиенты скалярных функций. Пусть  $\eta(r, t)$  — некоторая скалярная функция. Используя калибровочную инвариантность, введем новые (отрихованные) вариации потенциалов:

$$\begin{aligned} [\delta \varphi(r, t)]' = & \delta \varphi(r, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \eta(r, t), \\ [\delta A(r, t)]' = & \delta A(r, t) + \nabla \eta(r, t). \end{aligned}$$

Это преобразование вариаций не изменяет вариаций  $E(r, t)$  и  $H(r, t)$ . Так как  $\delta A(r, t_1)$  и  $\delta A(r, t_2)$  — градиенты скалярных функций, то величинами  $[\delta A(r, t_1)]'$  и  $[\delta A(r, t_2)]'$  можно сделать равными нулю, если выбрать  $\eta(r, t)$  так, чтобы удовлетворялись

соотношения

$$\nabla \eta(\mathbf{r}, t_1) = -\delta A(\mathbf{r}, t_1) \quad \text{и} \quad \nabla \eta(\mathbf{r}, t_2) = -\delta A(\mathbf{r}, t_2).$$

Следовательно, применяя принцип Гамильтона, мы можем считать условие (27) гораздо более удобным условием

$$\delta A(\mathbf{r}, t_1) = \delta A(\mathbf{r}, t_2) = 0.$$

Впредь мы будем использовать условие (31) вместо (27).

### § 3. Вывод аппроксимационные схем из принципа Гамильтона

#### 1. Метод Лагранжа

Чтобы использовать принцип Гамильтона для вывода аппроксимационных схем расчета функций  $\varphi$ ,  $A$  и  $R_k$ , надо сначала выбрать соответствующий способ аппроксимации этих функций, рассмотрим такие аппроксимации, которые можно представить с помощью набора зависящих от времени параметров. Зависимость этих параметров от времени подождет определению. Иными словами, мы будем рассматривать любые аппроксимации функций  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ ,  $A(\mathbf{r}, t)$  и  $R_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$  вида

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \Phi[\mathbf{r}, t, \{\alpha_n(t)\}],$$

$$A(\mathbf{r}, t) \approx \mathcal{A}[\mathbf{r}, t, \{\beta_m(t)\}]$$

и

$$R_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t) \approx \mathcal{R}_k[\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}(t)\}],$$

где  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$  — выбираемые функции своих аргументов, зависимость от  $t$  параметров  $\alpha_n(t)$ ,  $\beta_m(t)$  и  $\gamma_{kl}(t)$  должна быть задана. Функции  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$  и начальные условия для  $\alpha_n(t)$ ,  $\beta_m(t)$  и  $\gamma_{kl}(t)$  должны выбираться таким образом, чтобы удовлетворить граничным и начальным условиям для потенциалов и векторов, соответствующих рассматриваемой задаче. Суть нашего вывода аппроксимационных схем — в использовании принципа Гамильтона для получения единственной системы уравнений для параметров. Прежде чем применить принцип Гамильтона, рассмотрим пример выбора функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$ . В простейшем случае можно выбрать функции  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$ , которые не зависят от времени и выражаются линейными комбинациями конечного числа линейно-независимых базисных функций с зависящими от времени коэффициентами:

$$\Phi[\mathbf{r}, t, \{\alpha_n(t)\}] = \sum_{n=1}^{N_\alpha} \alpha_n(t) \Phi_n(\mathbf{r}),$$

$$\mathcal{A}[\mathbf{r}, t, \{\beta_m(t)\}] = \sum_{m=1}^{N_\beta} \beta_m(t) \mathcal{A}_m(\mathbf{r}), \quad (33a)$$

$$\mathcal{R}_k[\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}(t)\}] = \sum_{l=1}^{N_\gamma} \gamma_{kl}(t) \mathcal{R}_{kl}(\mathbf{r}', \mathbf{v}'). \quad (33b)$$

Такой частный выбор, когда используется линейная зависимость от конечного числа параметров, часто очень удобен. Однако это очень специальный выбор. Функции можно определить так, чтобы зависимость от параметров была бы существенно нелинейной. Выражения (32) должны быть совершенно общими, с тем чтобы при решении конкретной задачи выбрать на основании имеющихся знаний и интуитивных представлений о физической системе удобный тип аппроксимации. В самом деле, если точное решение выражается через  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{R}_k$ , то при этом не делается никаких предположений.

Если функции  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$  определены, то их можно использовать в лагранжиане (16) вместо обычных функций  $\varphi$ ,  $A$  и  $R_k$ . Величины, которые надо варьировать по принципу Гамильтона, — это зависящие от времени параметры  $\alpha_n(t)$ ,  $\beta_m(t)$  и  $\gamma_{kl}(t)$ . Возможные вариации  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$  имеют вид

$$\delta \Phi[\mathbf{r}, t, \{\alpha_n(t)\}] = \sum_{n=1}^{N_\alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_n} \delta \alpha_n, \quad (34a)$$

$$\delta \mathcal{A}[\mathbf{r}, t, \{\beta_m(t)\}] = \sum_{m=1}^{N_\beta} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \beta_m} \delta \beta_m, \quad (34b)$$

$$\delta \mathcal{R}_k[\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}(t)\}] = \sum_{l=1}^{N_\gamma} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \gamma_{kl}} \delta \gamma_{kl}. \quad (34b)$$

Для того чтобы вариации  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{R}_k$ , соответствующие варьированию каждого из параметров в отдельности, были линейно-независимыми, должны быть линейно-независимыми три набора функций  $\partial \Phi / \partial \alpha_n$ ,  $\partial \mathcal{A} / \partial \beta_m$  и  $\partial \mathcal{R}_k / \partial \gamma_{kl}$  для всех  $t$ . Как следствие этой линейной независимости на вариации  $\beta_m(t)$  и  $\gamma_{kl}(t)$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$  должны быть наложены ограничения, чтобы удовлетворить условиям (19) и (31). накладываемым на  $\delta R_k$  и  $\delta A$  в те же моменты времени:

$$\delta \beta_m(t_1) = \delta \beta_m(t_2) = 0$$

$$\delta \gamma_{kl}(t_1) = \delta \gamma_{kl}(t_2) = 0. \quad (35b)$$

Остальные условия (5), (24) и (29), которые требуются для применения принципа Гамильтона, также удовлетворяются, так как

граничные и начальные условия для потенциалов и траекторий удовлетворяются в силу формулы (32).

Единственная разница между использованием принципа Гамильтона для вывода точных уравнений физической системы и использованием его для вывода уравнений для зависящих времени параметров в том, что в последнем случае определяются вариации внутри *ограниченного* класса функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}_k$ . В условиях (35) уравнения, полученные из вариационного принципа для параметров, — это обычные уравнения Эйлера — Лагранжа, в которых  $L$  считается функцией обобщенных координат  $\sigma_n$  и  $\gamma_{kl}$ , обобщенных скоростей  $\dot{\sigma}_m$ ,  $\dot{\gamma}_{kl}$  и, возможно,  $t$ . Величина  $\phi$  отсутствует, так как  $\phi$  не входит в выражение точного Лагранжиана. Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}_{kl}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \sigma_{kl}} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial \sigma_m} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma_n} = 0.$$

Это приближенные уравнения, полученные из принципа Гамильтона. Следует заметить, что уравнение (36в) — не дифференциальное. В принципе его всегда можно решить и выразить  $\sigma_n(t)$  и остальные переменные, а результат подставить в уравнения (3) и (36б).

## 2. Метод Гамильтона и теорема энергии

Теорема энергии, которая была охарактеризована в § 1 вышешеем следствием вариационного подхода, может быть иллюстрирована при переходе к методу Гамильтона. Этот метод может быть полезен и в случае численных расчетов, так как система уравнений Эйлера — Лагранжа (36) заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка.

Определим обобщенные моменты  $\sigma_m$  и  $\gamma_{kl}$ , которые соответствуют обобщенным скоростям  $\dot{\sigma}_m$  и  $\dot{\gamma}_{kl}$ :

$$\sigma_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}_m},$$

$$\gamma_{kl} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_{kl}}.$$

Используя эти моменты, определяем функцию Гамильтона  $H$ :

$$H = \sum_m \dot{\sigma}_m \sigma_m + \sum_{k,l} \dot{\gamma}_{kl} \gamma_{kl} - L,$$

которую следует рассматривать как функцию  $\sigma_n, \dot{\sigma}_m, \gamma_{kl}, \dot{\gamma}_{kl}, \sigma_m, \dot{\gamma}_{kl}$  и, возможно,  $t$ . Этот гамильтониан несколько отличается от аналогичной величины для обычной механической системы, так как в него не входят импульсы, сопряженные с  $\sigma_n$ . Это случилось потому, что  $\sigma_n$  не входит в  $L$ . Тем не менее, используя (36) — (38), нетрудно доказать справедливость следующих гамильтоновых уравнений движения:

$$\dot{\gamma}_{kl} = \frac{\partial H}{\partial \gamma_{kl}}, \quad (39a)$$

$$\dot{\gamma}_{kl} = - \frac{\partial H}{\partial \dot{\gamma}_{kl}}, \quad (39b)$$

$$\dot{\sigma}_m = \frac{\partial H}{\partial \sigma_m}, \quad (39в)$$

$$\dot{\sigma}_m = - \frac{\partial H}{\partial \dot{\sigma}_m}, \quad (39г)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \sigma_n} = 0. \quad (39д)$$

Как и в случае последнего уравнения Эйлера — Лагранжа (36в), последнее уравнение Гамильтона, (39д), — не дифференциальное; в принципе его всегда можно решить, выразив  $\sigma_n(t)$  через остальные переменные.

Из уравнений Гамильтона следует

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (40)$$

Это уравнение и выражает теорему энергии. Оно справедливо при любом выборе функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}_k$  (32). Интересен частный случай, когда ни одна из функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}_k$  не зависит от времени явно. Тогда уравнение (40) имеет тот же вид, что и аналогичное соотношение для реальной физической системы, так как правая часть может отличаться от нуля, только если функции  $\rho_0(r, t)$ ,  $\dot{h}_0(r, t)$  и  $U(r, v, t)$  зависят от времени явно. Если же и  $\rho_0$ ,  $\dot{h}_0$  и  $U_k$  не зависят от времени явно, то в реальной физической системе энергия сохраняется и уравнение (40) сводится к

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (41)$$

Из (41) следует, что в случае рассматриваемой аппроксимационной схемы, как и в реальной физической системе, энергия сохраняется.

В заключение приведем формулы для  $L$  и  $H$  в случае, когда отсутствует материальная среда и ни одна из функций  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}_k$  не зависит от времени явно. Общие формулы будут приведены в приложении Б.

Так как материальная среда отсутствует, то  $\Phi$  (E,  $\chi$  (B, r, t) имеют простой вид, (13), и потому  $D = E$  и  $\chi$  (см. (14)). Учитывая, что функции не зависят от времени мы будем писать в формулах  $\Phi$  [r,  $\{\alpha_n(t)\}$ ],  $\mathcal{A}$  [r,  $\{\beta_m\}$ ] и  $\mathcal{R}_k$  [r', v',  $\{\gamma_{kl}(t)\}$ ] вместо  $\Phi$  [r, t,  $\{\alpha_n(t)\}$ ],  $\mathcal{A}$  [r, t,  $\{\beta_m\}$ ] и  $\mathcal{R}_k$  [r', v',  $\{\gamma_{kl}(t)\}$ ]. Выражение для  $L$  можно получить, подставив эти функции в уравнение (16):

$$L = \sum_{k=1}^N \int d^3r' d^3v' f_k(r', v', 0) \left\{ \frac{1}{2} M_k \left[ \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} \right]^2 - U_k(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}}(r', v', \{\gamma_{kl}\}), t) - Q_k \Phi(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), \{\alpha_n\}) + \frac{4}{c} Q_k \left[ \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} \right] \cdot \mathcal{A}(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), \{\beta_m\}) \right\} + \int_V d^3r \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[ -\nabla \Phi(r, \{\alpha_n\}) - \frac{1}{c} \sum_m \dot{\beta}_m \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{\beta}_m} \right]^2 - \frac{1}{8\pi} |\nabla \times \mathcal{A}(r, \{\beta_m\})|^2 - f_0(r, t) \Phi(r, \{\alpha_n\}) + \frac{4}{c} j(r, t) \cdot \mathcal{A}(r, \{\beta_m\}) \right\}.$$

Обобщенные импульсы [см. (37)] имеют вид

$$\sigma_m = \frac{1}{4\pi c} \int_V d^3r \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{\beta}_m} \cdot \left[ \nabla \Phi(r, \{\alpha_n\}) + \frac{4}{c} \sum_i \dot{\beta}_i \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{\beta}_i} \right],$$

$$\tau_{kl} = \int d^3r' d^3v' f_k(r', v', 0) \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{kl}} \cdot \left\{ M_k \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} - \nabla_r U_k(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), v, t) \right\} - \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \left( \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{kl}} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} \right) + \frac{4}{c} Q_k \mathcal{A}(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), \{\beta_m\})$$

В выражении (43а) обобщенный импульс  $\sigma_m$  и обобщенные скорости  $\dot{\beta}_i$  связаны линейной зависимостью. Если  $U_k(r, v, t)$  равно или зависит от скорости только через  $v^2$ , то уравнение (43б) связывает линейной зависимостью обобщенный импульс и обобщенные скорости  $\dot{\gamma}_{kl}$ . Если не накладывать каких-либо

ограничений на  $U_k(r, v, t)$ , то гамильтониан (38) принимает вид

$$H = \sum_{k=1}^N \int d^3r' d^3v' f_k(r', v', 0) \left\{ \frac{1}{2} M_k \left[ \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} \right]^2 + U_k(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}}(r', v', \{\gamma_{kl}\}), t) - \left[ \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} \right] \cdot \nabla_r U_k(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), v, t) \right\} - \sum_i \dot{\gamma}_{ki} \left( \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{kl}} \frac{\partial \mathcal{R}_k}{\partial \dot{\gamma}_{ki}} \right) + Q_k \Phi(\mathcal{R}_k(r', v', \{\gamma_{kl}\}), \{\alpha_n\}) + \int_V d^3r \left\{ -\frac{1}{8\pi} |\nabla \Phi(r, \{\alpha_n\})|^2 + \frac{4}{8\pi} \left[ \frac{1}{c} \sum_m \dot{\beta}_m \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \dot{\beta}_m} \right]^2 + \frac{1}{8\pi} |\nabla \times \mathcal{A}(r, \{\beta_m\})|^2 + f_0(r, t) \Phi(r, \{\alpha_n\}) - \frac{4}{c} j_0(r, t) \cdot \mathcal{A}(r, \{\beta_m\}) \right\}, \quad (44)$$

где обобщенные скорости нужно выразить через обобщенные координаты и импульсы с помощью (43).

#### § 4. Случай конечного числа частиц

Вариационный подход легко применить для численного моделирования плазмы с помощью конечного числа точечных частиц. Простейшие численные методы для конечного числа частиц тесно связаны с другими находящимися в употреблении методами [3—5]. При конечном числе точечных частиц вариационный метод приводит к специфическим аппроксимационным схемам для потенциалов и к специфическим методам расчета полей, которые входят в уравнения движения частиц. В этом параграфе мы рассмотрим два частных случая: одномерный электростатический случай и двумерный электростатический случай.

##### 1. Одномерный электростатический случай

Рассмотрим случай одной пространственной переменной  $x$  с периодическими граничными условиями, налагаемыми при  $x = 0$  и  $x = \lambda$ . Будем рассматривать только один тип частиц при наличии заданного однородного нейтрализующего фона с плотностью заряда  $f_0$ . Векторный потенциал можно положить тождественно равным нулю, так как имеется только одно измерение. Начальная

функция распределения задается суммой  $\delta$ -функций:

$$f(x', v', 0) = \sum_{i=1}^{N_2} \delta(x' - x_i) \delta(v' - v_i),$$

где  $x_i$  и  $v_i$  — соответственно координата и скорость  $i$ -й части, и  $N_2$  — число частиц. У функции  $\mathcal{H}_h$  в рассматриваемом случае будет только одна  $x$ -компонента. Обозначив эту компоненту  $\xi$ , выберем  $\xi$  и  $\Phi$  в виде

$$\Phi(x, t, \{z_n(t)\}) = \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n(t) \Phi_n(x)$$

и

$$\xi[x', v', t, \{\gamma_l(t)\}] = \sum_{l=1}^{N_2} \gamma_l(t) X_l(x', v').$$

Соотношения (46) — частный случай (33). Функции  $\Phi_n(x)$  должны удовлетворять граничным условиям при  $x = 0$  и  $x = \lambda$ , как начальная функция распределения сингулярна, удобно делить величину  $X_l$  так:

$$X_l(x', v') = \begin{cases} 1, & \text{если } x' = x_l \text{ и } v' = v_l, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Тогда начальные условия для  $\gamma_l(t)$  будут иметь вид

$$\gamma_l(0) = x_l \quad \text{и} \quad \dot{\gamma}_l(0) = v_l.$$

Очевидно, что  $\gamma_l(t)$  — координата частицы  $l$  в момент  $t$ . Полагая (45) и (46) в лагранжиан (42), получаем

$$\begin{aligned} L = & \int_0^\lambda dx' \int dv' \sum_{i=1}^{N_2} \delta(x' - x_i) \delta(v' - v_i) \left\{ \frac{1}{2} M \left[ \sum_{l=1}^{N_2} \dot{\gamma}_l X_l(x', v') \right]^2 \right. \\ & \left. - Q \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \Phi_n \left[ \sum_{l=1}^{N_2} \gamma_l X_l(x', v') \right] \right\} + \\ & + \int_0^\lambda dx \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[ \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \Phi_n'(x) \right]^2 - \rho_0 \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \Phi_n(x) \right\} - \\ & - \sum_{l=1}^{N_2} \left\{ \frac{1}{2} M \dot{\gamma}_l^2 - Q \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \Phi_n(\gamma_l) \right\} + \\ & + \int_0^\lambda dx \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[ \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \Phi_n'(x) \right]^2 - \rho_0 \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \Phi_n(x) \right\}. \end{aligned}$$

где

$$\Phi_n'(x) = \frac{d}{dx} \Phi_n(x).$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа (36а) и (36в) для этого лагранжиана имеют вид

$$M \ddot{\gamma}_l - Q \sum_{i=1}^{N_2} \alpha_i(t) \Phi_i'(\gamma_l), \quad (50а)$$

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \int_0^\lambda dx \Phi_i'(x) \Phi_n'(x) - \rho_0 \int_0^\lambda dx \Phi_n(x) + Q \sum_{l=1}^{N_2} \Phi_n(\gamma_l). \quad (50б)$$

Уравнение (50а) — обычное уравнение движения для частицы с номером  $l$ , а уравнение (50б) — некоторая аппроксимационная схема для решения уравнения Пуассона. Вследствие (44) из этих уравнений следует закон сохранения энергии.

Простой частный случай уравнений (50) тесно связан с численным методом [3]. Из вариационного подхода следуют варианты этого метода, а также различные обобщения, в каждом из которых энергия сохраняется, можно получить, если для скалярного потенциала использовать кусочно-линейную аппроксимацию. Мы приравняли скалярный потенциал в крайних точках  $x = 0$  и  $x = \lambda$  нулю и использовали локальный базис для периодических, кусочно-линейных функций, которые в крайних точках обращаются в нуль. Локальные базисные функции — это функции  $g_n(x)$ :

$$g_n(x) = \begin{cases} (1/\Delta) |x - (n-1)\Delta|, & \text{если } (n-1)\Delta \leq x \leq n\Delta, \\ (1/\Delta) |(n+1)\Delta - x|, & \text{если } n\Delta \leq x \leq (n+1)\Delta, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (51)$$

где  $\Delta = \lambda / (N_2 + 1)$ . Если в качестве функций  $\Phi_n(x)$  выбрать кусочно-линейные функции  $g_n(x)$ , то  $\alpha_n(t)$  определит потенциал в точке  $x = n\Delta$  и интегралы в (50б) будут равны

$$\int_0^\lambda dx \Phi_n(x) = \Delta, \quad (52а)$$

$$\int_0^\lambda dx \Phi_i'(x) \Phi_n'(x) = \begin{cases} 2/\Delta, & \text{если } i = n, \\ -1/\Delta, & \text{если } |i - n| = 1, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (52б)$$

Матрица (52б) — обычная центральная разностная аппроксимация второй производной. Как следствие этих формул уравнение (50б) идентично формуле для уравнения Пуассона, используе-

мой в [3]. Метод [3] отличается от нашего только тем, что используется кусочно-линейная аппроксимация провозов  $\Phi_i^1(\gamma)$  в уравнении движения (50а); из-за этой разницы в методе энергия не сохраняется.

## 2. Двумерный электростатический случай

Наш второй пример в случае конечного числа частиц явочен рассмотренному, за исключением того, что теперь мы используем две пространственные декартовы координаты,  $x$  и  $y$ . И жим периодические граничные условия на краях квадрата стороной  $\lambda$ . Как и прежде, будем рассматривать один тип ча при наличии однородного нейтрализующего фона с плотностью заряда  $\rho_0$  и будем пренебрегать векторным потенциалом. Такая функция распределения имеет вид

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) = \sum_{i=1}^{N_i} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) \delta(\mathbf{v}' - \mathbf{v}_i),$$

где  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — соответственно начальные радиус-вектор и скорость частицы с номером  $i$ , а  $N_i$  — число частиц. Как и раньше, это только одна функция  $\mathcal{A}_i$ ; обозначим ее через  $\mathcal{A}$  и выберем  $\Phi$  в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_{nm}(t)\}) = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} \alpha_{nm}(t) \Phi_{nm}(x, y)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{ix}(t), \gamma_{iy}(t)\}] = \\ = \sum_{i=1}^{N_2} \{\gamma_{ix}(t) \mathcal{A}_{ix}(\mathbf{r}', \mathbf{v}') + \gamma_{iy}(t) \mathcal{A}_{iy}(\mathbf{r}', \mathbf{v}')\}. \end{aligned}$$

Эти выражения — частный случай (33). Примем, что на квадрата потенциал должен обращаться в нуль. Для этого потребовать, чтобы функция  $\Phi_{nm}(x, y)$  обращалась в нуль на краях квадрата. Базисные функции  $\mathcal{A}_{ix}$  и  $\mathcal{A}_{iy}$  определим

$$\mathcal{A}_{ix}(\mathbf{r}', \mathbf{v}') = \begin{cases} \hat{i}, & \text{если } \mathbf{r}' = \mathbf{r}_i \text{ и } \mathbf{v}' = \mathbf{v}_i, \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

и

$$\mathcal{A}_{iy}(\mathbf{r}', \mathbf{v}') = \begin{cases} \hat{j}, & \text{если } \mathbf{r}' = \mathbf{r}_i \text{ и } \mathbf{v}' = \mathbf{v}_i, \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где  $\hat{i}$  и  $\hat{j}$  — единичные векторы в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно. Начальные условия для  $f_{ix}(t)$  и  $f_{iy}(t)$  имеют вид

$$\gamma_{ix}(0) \hat{i} + \gamma_{iy}(0) \hat{j} = \mathbf{v}_i$$

и

$$\dot{\gamma}_{ix}(0) \hat{i} + \dot{\gamma}_{iy}(0) \hat{j} = \mathbf{v}_i. \quad (55b)$$

Очевидно, что  $\gamma_{ix}(t) \hat{i} + \gamma_{iy}(t) \hat{j}$  есть радиус-вектор частицы с номером  $i$  в момент  $t$ . Подставляя в лагранжиан (42), получаем

$$\begin{aligned} L = \sum_{i=1}^{N_2} \left\{ \frac{1}{2} M \dot{\gamma}_{ix}^2 + \dot{\gamma}_{iy}^2 \right\} - Q \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} \alpha_{nm} \Phi_{nm}(\gamma_{ix}, \gamma_{iy}) \Big\} + \\ + \int_0^\lambda dx \int_0^\lambda dy \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[ \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} \alpha_{nm} \nabla \Phi_{nm}(x, y) \right]^2 - \right. \\ \left. - \rho_0 \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} \alpha_{nm} \Phi_{nm}(x, y) \right\}. \quad (57) \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Phi_{nm,x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi_{nm}(x, y), \quad \Phi_{nm,y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \Phi_{nm}(x, y), \quad (58)$$

тогда

$$\nabla \Phi_{nm}(x, y) = \hat{i} \Phi_{nm,x}(x, y) + \hat{j} \Phi_{nm,y}(x, y).$$

Если использовать эти обозначения, то уравнения Эйлера — Лагранжа (36а) и (36в) примут вид

$$M \ddot{\gamma}_{ix} = -Q \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} \alpha_{nm}(t) \Phi_{nm,x}(\gamma_{ix}, \gamma_{iy}), \quad (59a)$$

$$M \ddot{\gamma}_{iy} = -Q \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_1} \alpha_{nm}(t) \Phi_{nm,y}(\gamma_{ix}, \gamma_{iy}), \quad (59b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} \alpha_{ij} \int_0^\lambda dx \int_0^\lambda dy \{ \Phi_{ij,x}(x, y) \Phi_{nm,x}(x, y) + \\ + \Phi_{ij,y}(x, y) \Phi_{nm,y}(x, y) \} = \\ = \rho_0 \int_0^\lambda dx \int_0^\lambda dy \Phi_{nm}(x, y) + Q \sum_{i=1}^{N_1} \Phi_{nm}(\gamma_{ix}, \gamma_{iy}). \quad (60) \end{aligned}$$

Уравнения (59) — обычные уравнения движения частицы с номером  $i$ , а уравнение (60) — векторная аппроксимационная схема для решения уравнения Пуассона. Как и выше, из этих уравнений следует закон сохранения энергии.

Простой частный случай уравнений (59) и (60) тесно связан с методом [3] и с одной из процедур [4, 5]. Как и в случае одного измерения, на вариационного метода следует вариант методов



[3—5] и различные обобщения, в каждом из которых аналог сохраняется. Вариант методов [3—5], в котором сохраняется энергия, получается, если для скалярного потенциала использовать кусочно-билинейную аппроксимацию. Локальный базис периодических, кусочно-билинейных функций, которые обращаются в нуль на краях квадрата, задается функциями  $g_n$ . Локальные базисные функции — это произведения  $g_n(x)g_m(y)$ . Соответственно выберем теперь  $\Phi_{nm}(x, y)$  в виде

$$\Phi_{nm}(x, y) = g_n(x)g_m(y).$$

Если использовать обозначение  $g'_n(x) = (d/dx)g_n(x)$ , то уравнения (59) и (60) можно переписать в виде

$$M\ddot{\gamma}_{ix} = -Q \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \alpha_{nm}(t) g'_n(\gamma_{ix}) g_m(\gamma_{iy}),$$

$$M\ddot{\gamma}_{iy} = -Q \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} \alpha_{nm}(t) g_n(\gamma_{ix}) g'_m(\gamma_{iy}).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_{ij} \int_0^\lambda dx \int_0^\lambda dy [g'_i(x)g'_j(y)g_j(y)g_m(y) + \\ + g_i(x)g_n(x)g'_j(y)g'_m(y)] = \\ = \rho_0 \int_0^\lambda dx \int_0^\lambda dy g_n(x)g_m(y) + Q \sum_{l=1}^{N_3} g_l(\gamma_{ix})g_m(\gamma_{iy}). \end{aligned}$$

Интегралы в (63) равны

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda dx g_n(x)g_m(x) &= \frac{\lambda}{3} \Delta \delta_{nm} + \frac{1}{6} \Delta (\delta_{n, m+1} + \delta_{n+1, m}), \\ \int_0^\lambda dx g'_n(x)g'_m(x) &= \frac{2}{\Delta} \delta_{nm} - \frac{1}{\Delta} (\delta_{n, m+1} + \delta_{n+1, m}). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (63), которое определяет аппроксимационную схему решения уравнения Пуассона, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \alpha_{ij} \left[ 3\delta_{im}\delta_{jm} - \frac{1}{3}(\delta_{in} + \delta_{i+1, n} + \delta_{i, n+1}) \times \right. \\ \left. \times (\delta_{jm} + \delta_{j+1, m} + \delta_{j, m+1}) \right] = \rho_0 \Delta^2 + Q \sum_{l=1}^{N_3} g_l(\gamma_{ix})g_m(\gamma_{iy}). \end{aligned}$$

Последний член в правой части этого равенства в точности соответствует процедуре «весовых множителей для областей», которая применялась Морзом и Нильсоном [6], а также Бордсвиллом и Фаском [4, 5] для расчета заряда в их аппроксимационных схемах решения уравнения Пуассона. Левая часть равенства (65) соответствует девятипоточной разностной аппроксимации двумерного Лапласа, матрица которой имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 8 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

### § 5. Применение к случаю двухпоточковой неустойчивости при низких температурах бля kontinuierная частица

В этом параграфе мы используем вариационный метод для вывода аппроксимационной схемы в случае, когда рассматривается континуум частиц вместо конечного числа частиц [8, 6]. Как мы видели в § 2, именно в случае континуума аппроксимационная схема приводит к описанию плазмы в приближении Власова, тогда частицы описываются одночастичными функциями распределения, удовлетворяющими бесстолкновительным уравнениям Больцмана. Одна из наиболее привлекательных сторон вариационного подхода к численным методам — это возможность определить, так с помощью малого числа параметров эффективно описать континуум частиц. Пример, который мы рассмотрим в настоящем параграфе, — первый шаг в этом направлении. Данная возможность в настоящее время активно исследуется Льюисом и Мейенделем.

Рассмотрим плазму из одного типа частиц в пространстве одного измерения  $x$  при наличии однородного нейтрализующего фона с плотностью заряда  $\rho_0$ . Наложим периодические граничные условия при  $x = 0$  и  $x = \lambda$ . Так как имеется только одно измерение, положим векторный потенциал тождественно равным нулю. Пусть сначала частицы образуют два, возможно искаженных, потока в фазовом пространстве. Начальная функция распределения есть

$$f(x', v', 0) = \sum_{i=1}^2 f_i(x') \delta[v' - g_i(x')], \quad (66)$$

где

$$g_1(x') = -V + A_1 \sin \frac{2\pi m}{\lambda} x' + B_1 \cos \frac{2\pi m}{\lambda} x',$$

$$g_2(x') = V + A_2 \sin \frac{2\pi m}{\lambda} x' + B_2 \cos \frac{2\pi m}{\lambda} x'$$

и

$$f_i(x') = \frac{n_0}{2} + C_i \sin \frac{2\pi m}{\lambda} x' + D_i \cos \frac{2\pi m}{\lambda} x'.$$

В этих формулах  $m$  — целое число,  $V$  — скорость,  $n_0$  — начальная средняя пространственная плотность, а  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  и  $D_i$  — константы, определяющие отклонение начальной функции от равновесной. Плотность заряда фона можно выразить через  $n_0$  и  $Q$ :

$$\rho_0 = -n_0 Q.$$

Имеется только одна функция  $\mathcal{H}_k$ ,  $x$ -компоненту которой обозначим через  $\xi$ . Мы выберем  $\xi$  и  $\Phi$  в несколько более общем виде, чем в (33):

$$\Phi[x, t, \{\alpha_n(t)\}] = \alpha_0(t) + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \times \\ \times \left\{ \alpha_{2n}(t) \sin \frac{2\pi n}{\lambda} x + \alpha_{2n-1}(t) \cos \frac{2\pi n}{\lambda} x \right\},$$

$$\xi[x', v', t, \{\gamma_{11}^{(i)}(t), \gamma_{12}^{(i)}(t)\}] = x' + \sum_{i=1}^2 e_i(x', v') \times \\ \times \left\{ \gamma_{11}^{(i)}(t) + \sum_{l=1}^{N_2} \left[ \gamma_{11}^{(i)}(t) \sin \frac{2\pi l}{\lambda} x' + \gamma_{12}^{(i)}(t) \cos \frac{2\pi l}{\lambda} x' \right] \right\},$$

где

$$e_i(x', v') = \begin{cases} g_i(x'), & \text{если } v' = g_i(x'), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Начальные условия для  $\gamma_{1i}^{(j)}(t)$  и  $\gamma_{2i}^{(j)}(t)$  имеют вид

$$\gamma_{1i}^{(j)}(0) = \gamma_{2i}^{(j)}(0) = 0,$$

$$\dot{\gamma}_{1i}^{(j)}(0) = \dot{\gamma}_{2i}^{(j)}(0) = 0, \text{ если } l \neq 0,$$

$$\dot{\gamma}_{10}^{(j)}(0) = 1.$$

Подставляя (70) в лагранжиан (42), получаем

$$L = \frac{1}{2} M \sum_{i=1}^2 \int_0^{\lambda} dx' f_i(x') g_i^2(x') \left\{ \dot{\gamma}_{10}^{(i)} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{N_2} \left[ \gamma_{11}^{(i)} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} x' + \gamma_{12}^{(i)} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} x' \right] \right\}^2 - \\ - Q \sum_{l=1}^2 \sum_{n=1}^{N_1} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \int_0^{\lambda} dx' f_i(x') \times \\ \times \left\{ \alpha_{2n} \sin \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_i(x'), \gamma) \right] + \right. \\ \left. + \alpha_{(2n-1)} \cos \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_i(x'), \gamma) \right] \right\} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_1} \left[ \alpha_{(2n)}^2 + \alpha_{(2n-1)}^2 \right], \quad (73)$$

где мы использовали сокращение

$$\xi(x', v', \gamma) = \xi[x', v', t, \{\gamma_{11}^{(i)}(t), \gamma_{12}^{(i)}(t)\}]. \quad (74)$$

Для этого лагранжиана уравнения Эйлера — Лагранжа, (36a) и (36b), имеют вид

$$\alpha_{2n} = Q \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\lambda} dx' f_i(x') \sin \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_i(x'), \gamma) \right], \quad (75a)$$

$$\alpha_{2n-1} = Q \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\lambda} dx' f_i(x') \times \\ \times \cos \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_i(x'), \gamma) \right], \quad (75b)$$

$$M \int_0^{\lambda} dx' f_i(x') g_i^2(x') \left\{ \ddot{\gamma}_{10}^{(i)} + \sum_{l=1}^{N_2} \left[ \ddot{\gamma}_{11}^{(i)} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} x' + \ddot{\gamma}_{12}^{(i)} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} x' \right] \right\} = \\ = -Q \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}} \sum_{n=1}^{N_1} \int_0^{\lambda} dx' f_i(x') g_i(x') \times \\ \times \left\{ \alpha_{2n} \cos \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_i(x'), \gamma) \right] - \right. \\ \left. - \alpha_{(2n-1)} \sin \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_i(x'), \gamma) \right] \right\}, \quad (75b)$$

$$\begin{aligned}
 M \int_0^{\lambda} dx' f_1(x') g_1^2(x') \sin \frac{2\pi k}{\lambda} x' \left\{ \ddot{\gamma}_{11}^{(0)} + \right. \\
 \left. + \sum_{l=1}^{N_3} \left[ \ddot{\gamma}_{11}^{(l)} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} x' + \ddot{\gamma}_{12}^{(l)} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} x' \right] \right\} = \\
 = -QV \sqrt{\frac{8\pi}{\lambda}} \sum_{n=1}^{N_1} \int_0^{\lambda} dx' f_1(x') g_1(x') \sin \frac{2\pi n}{\lambda} x' \times \\
 \times \left\{ a_{(2n)} \cos \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_1(x'), \gamma) \right] - \right. \\
 \left. - a_{(2n-1)} \sin \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_1(x'), \gamma) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M \int_0^{\lambda} dx' f_1(x') g_1^2(x') \cos \frac{2\pi k}{\lambda} x' \left\{ \ddot{\gamma}_{22}^{(0)} + \right. \\
 \left. + \sum_{l=1}^{N_3} \left[ \ddot{\gamma}_{11}^{(l)} \sin \frac{2\pi l}{\lambda} x' + \ddot{\gamma}_{12}^{(l)} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} x' \right] \right\} = \\
 = -QV \sqrt{\frac{8\pi}{\lambda}} \sum_{n=1}^{N_1} \int_0^{\lambda} dx' f_1(x') g_1(x') \cos \frac{2\pi n}{\lambda} x' \times \\
 \times \left\{ a_{(2n)} \cos \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_1(x'), \gamma) \right] - \right. \\
 \left. - a_{(2n-1)} \sin \left[ \frac{2\pi n}{\lambda} \xi(x', g_1(x'), \gamma) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Из этих уравнений следует, что энергия сохраняется.

Результаты численного интегрирования уравнений (75) с равными начальными функциями распределения показывают, что некоторые величины, которые могут быть получены из ряда, чувствительны к числу базисных функций ( $m=1$ ;  $N_3$ ,  $N_3 \leq 5$ ). В частности, не чувствительны к числу базисных функций максимальная величина электрической энергии, время, энергия достигает максимума, средняя величина электрической энергии и распределение по скоростям по истечении длительного времени.

Интегралы в уравнениях (75b)–(75d), которые умножаются на  $\ddot{\gamma}_{11}^{(0)}$ ,  $\ddot{\gamma}_{12}^{(0)}$  и  $\ddot{\gamma}_{22}^{(0)}$ , не содержат  $t$ , и потому их надо вычислять в один раз. Другие интегралы в уравнениях (75) входят в  $\xi(x', g_1(x'), \gamma)$  и потому зависят от  $t$ , так как  $\gamma_{11}^{(0)}$ ,  $\gamma_{12}^{(0)}$  и  $\gamma_{22}^{(0)}$  зависят от  $t$ . Все интегралы, в которые входит  $\xi(x', g_1(x'), \gamma)$ ,

представить как линейные комбинации интегралов вида

$$\begin{aligned}
 I(s; \{a_k, b_k\}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \times \\
 \times \exp \left\{ i \left[ s\theta + \sum_{k=1}^M (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \right] \right\}, \quad (76)
 \end{aligned}$$

где  $s$  и  $M$  — целые числа, а  $a_k$  и  $b_k$  — линейные комбинации  $\gamma_{11}^{(0)}$ ,  $\gamma_{12}^{(0)}$  и  $\gamma_{22}^{(0)}$ . Интегралы этого вида в общем случае нельзя вычислить аналитически, и их численная оценка — главная трудность в пути получения численного решения уравнений (75). По этой причине были разработаны специальные методы точного и эффективного вычисления таких интегралов [12]. Если значения  $a_k$  и  $b_k$  увеличиваются, то трудности при интегрировании возрастают, так как подынтегральные выражения начинают осциллировать быстрее. Анализ показывает, что в случае неравномерных начальных функций распределения решение уравнений (75) в конце концов приводит к таким большим величинам  $a_k$  и  $b_k$ , что интегралы могут быть довольно точно вычислены методом стационарной фазы. Эта возможность асимптотической оценки интегралов может привести к некоторому полупрактическому описанию поведения двухпоточковой неустойчивости при больших  $t$ .

### Приложение А. Градиенты по координатам и скорости

Операторы  $\nabla_r$  и  $\nabla_v$ , действующие на функцию  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , где  $\mathbf{r} = d\mathbf{r}/dt$ , определены по отношению к вариации  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , которая обусловлена вариацией  $d\mathbf{r}$  и связанной с ней вариацией  $d\mathbf{v} = (d/dt)d\mathbf{r}$ . Когда говорят, что  $U$  есть функция  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ , то подразумевают, что она есть функция трех независимых координат вектора  $\mathbf{r}$  и еще трех перпендикулярных, которые определяют  $\mathbf{v}$  для фиксированного  $\mathbf{r}$ . Предположим, что три последние переменные — компоненты  $\mathbf{r}$  в системе координат, выбранной для  $\mathbf{r}$ . Зависимость  $U$  от  $\mathbf{v}$  всегда может быть выражена через эти переменные. Определим систему координат для  $\mathbf{r}$  единичными векторами  $\hat{e}_j(\mathbf{r})$  и обозначим координаты  $\mathbf{r}$  в этой системе через  $x_j$ . Мы считаем, что  $U(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — явная функция переменных  $x_j$  и  $\hat{e}_j \cdot \mathbf{v}$ . Производная по  $x_j$  выражается, как обычно, через функцию  $h_j(\mathbf{r})$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x_j} = h_j(\mathbf{r}) \hat{e}_j. \quad (A1)$$

Вариация функции  $U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , которая обуславливается вариациями  $\delta \mathbf{r}$  и  $\delta \dot{\mathbf{r}}$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{j=1}^3 \left\{ \delta x_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + \delta(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}}) \frac{\partial U}{\partial(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}})} \right\} - \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ h_j \delta x_j \left( \frac{1}{h_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right) + [\delta \mathbf{r} \cdot (\nabla \dot{\mathbf{e}}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{e}}_j \cdot \delta \dot{\mathbf{r}}] \frac{\partial U}{\partial(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}})} \right\} \\ &= \delta \mathbf{r} \cdot \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{h_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j + \frac{\partial U}{\partial(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}})} (\nabla \dot{\mathbf{e}}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}} \right\} + \\ &\quad + \delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U}{\partial(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}})} \hat{\mathbf{e}}_j. \end{aligned}$$

Операторы  $\nabla_{\mathbf{r}}$  и  $\nabla_{\dot{\mathbf{r}}}$  определяются так:

$$\delta U = \delta \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} U + \delta \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U,$$

где

$$\nabla_{\mathbf{r}} U = \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{1}{h_j} \frac{\partial U}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j + \frac{\partial U}{\partial(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}})} (\nabla \dot{\mathbf{e}}_j) \cdot \dot{\mathbf{r}} \right\}$$

и

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} U = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial U}{\partial(\dot{\mathbf{e}}_j \cdot \dot{\mathbf{r}})} \hat{\mathbf{e}}_j.$$

Видно, что  $\nabla_{\mathbf{r}} U$  — обычный градиент по радиусу-вектору, вектор  $\dot{\mathbf{r}}$  фиксирован. Аналогично

$$\nabla_{\dot{\mathbf{r}}} = \sum_{j=1}^3 \hat{\mathbf{e}}_j \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где дифференцирование по  $x_j$  выполняется при фиксированном

### Приложение Б. Формулы для L и II в общем случае

Выражение для L можно получить, если  $\Phi[\mathbf{r}, t, \{\alpha_n(t)\}, \mathcal{S}[\mathbf{r}, t, \{\beta_m(t)\}], \mathcal{S}_k[\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}(t)\}]]$  подставить в уравнение

$$\begin{aligned} L &= \sum_{k=1}^N \int d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{v}' f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) \left\{ \frac{1}{2} M_k \left[ \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - U_k(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}}, t) - \right. \\ &\quad \left. - Q_k \Phi(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), t, \{\alpha_n\}) \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{c} Q_k \left[ \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \right] \cdot \mathcal{S}(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), t, \{\beta_m\}) \Big\} + \\ &+ \int_V d^3 \mathbf{r} \left\{ \Psi(-\nabla \Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_n\})) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} - \frac{1}{c} \sum_m \dot{\beta}_m \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_m}, \mathbf{r}, t) - \right. \\ &\quad \left. - \chi(\nabla \times \mathcal{S}(\mathbf{r}, t, \{\beta_m\}), \mathbf{r}, t) - \rho_0(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_n\}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} \int_0(\mathbf{r}, t) \cdot \mathcal{S}(\mathbf{r}, t, \{\beta_m\}) \right\}. \quad (B1) \end{aligned}$$

(Обобщенные импульсы, которые определены уравнениями (37), имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_k &= - \frac{1}{c} \int_V d^3 \mathbf{r} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_m} \times \\ &\quad \times \nabla_k \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{E} = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_n\}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} - \frac{1}{c} \sum_l \dot{\beta}_l \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_l}}, \quad (B2a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{kl} &= \int d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{v}' f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \times \\ &\quad \times \left\{ M_k \left[ \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \nabla_{\mathbf{r}'} U_k(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), \mathbf{v}, t) \Big|_{\mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} Q_k \mathcal{S}(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), t, \{\beta_m\}) \right\}. \quad (B2b) \end{aligned}$$

Гамильтониан (38) имеет вид

$$\begin{aligned} H &= \sum_{k=1}^N \int d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{v}' f_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', 0) \left\{ \frac{1}{2} M_k \left[ \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. - M_k \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} \cdot \left[ \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + U_k(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}}, t) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \nabla_{\mathbf{r}'} U_k(\mathcal{S}_k(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_{kl}\}), \mathbf{v}, t) \Big|_{\mathbf{v} = \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial t} + \sum_l \dot{\gamma}_{kl} \frac{\partial \mathcal{S}_k}{\partial \gamma_{kl}}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + Q_h \Phi(\mathcal{S}_h(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_h\}), t, \{\alpha_n\}) - \\
 & - \frac{1}{c} Q_h \frac{\partial \mathcal{S}_h}{\partial t} \cdot \mathcal{S}(\mathcal{S}_h(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t, \{\gamma_h\}), t, \{\beta_m\}) + \\
 & + \int_V d^3r \left\{ -\frac{1}{c} \left[ \sum_m \dot{\beta}_m \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_m} \right] \times \right. \\
 & \times \left. \nabla_{\mathbf{r}} \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r} = \nabla \Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_n\})} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} - \frac{1}{c} \sum_m \dot{\beta}_m \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_m} \right. \\
 & - \psi \left( \nabla \Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_n\}) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} - \frac{1}{c} \sum_m \dot{\beta}_m \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \beta_m}, \mathbf{r}, t \right) + \\
 & \left. + \chi(\nabla \times \mathcal{S}(\mathbf{r}, t, \{\beta_m\}), \mathbf{r}, t) + f_0(\mathbf{r}, t) \Phi(\mathbf{r}, t, \{\alpha_n\}) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{c} \int_0^t (\mathbf{r}, t) \cdot \mathcal{S}(\mathbf{r}, t, \{\beta_m\}) \right\}.
 \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Proc. APS. Topical Conf. Numerical Simulation of Plasma, Sept. 1968. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3990.
2. *Mjolsness R. C.*, «Variational Solution of the Vlasov Equations», в *Norse R. L., Nielson C. W.*, Paper A4 в трудах [1].
3. *Birdall C. K., Fuus D.*, Paper D1 в трудах [1].
4. *Birdall C. K., Fuus D.*, Journ. Comput. Phys., 3, 494 (1969).
5. *Leuts H. R., Melendez K. J.*, Paper M1 в трудах [1].
6. *Goldstein H.*, Classical Mechanics, Reading, Mass., 1950. (См. введ. *Г. Гольдштейна*, Классическая механика, М., 1957.)
8. *Leuts H. R.*, «Hamilton's Principle and Numerical Solution of Vlasov Equations», Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3967.
9. *Leuts H. R.*, «Energy-Conserving Numerical Approximations for Plasmas», Journ. Comput. Phys., 6, № 4, 436 (1970).
10. *Lor F. E.*, Proc. Roy. Soc., A298, 282 (1958).
11. *Sturrock P. A.*, Ann. Phys., 4, 306 (1958).
12. *Thomas J. D., Leuts H. R., Melendez K. J.*, «An Efficient for Computing a Class of Definite Integrals», в печати.

## МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

К. Робертс\*, Д. Поттер\*\*

## § 1. Введение

Численное моделирование поведения проводящей текучей среды или плазмы в магнитном поле представляет интерес в астрофизике, геофизике, космической физике, а также в исследованиях по управляемому термоядерному синтезу. Научаемые явления, как правило, носят двух- или трехмерный характер, причем значительная часть их имеет нелинейную природу. Это затрудняет аналитические расчеты, а проведение контролируемых экспериментальных измерений часто является делом столь же трудным — либо по причине недостижимости физических процессов (межзвездные газовые облака, физика поверхности Солнца, проблема земного динamo), либо из-за того, что введение зонда в плазму может привести к разрушению и зонда, и плазмы. Поэтому широкое применение численного моделирования позволяет познакомиться с основными процессами магнитной гидродинамики (МГД) и наглядно представить их себе благодаря методам графической индикации. Такой путь исследований противостоит естественному обиходу гидродинамики, где уравнения проще, а границы их применимости определены и где еще до начала теоретической разработки предмета многие явления были хорошо знакомы из повседневных наблюдений.

В то же время следует признать, что МГД в сущности «незамкнутая» теория. МГД-модель плазмы — это лишь модель, и часто, если требуется сколько-нибудь точное совпадение с экспериментом, простейшую систему уравнений приходится дополнять добавочными членами, учитывающими конечный ларморовский радиус, анизотропию теплопроводности, ионизацию и рекомбинацию с нейтралами, ислускание и поглощение волн и т. д. Часто МГД-модель оказывается непримодной, и тогда необходимо использовать более полные уравнения Власова или Фоккера — Планка. Во всей плазме или локально может возникать мелкомасштабная турбулентность, которую необходимо моделировать эмпирическими коэффициентами диффузии. Для полного исследования вопроса путем наблюдения и эксперимента с применением аналитической

\* Keith V. Roberts, Culham Laboratory, Abingdon, Berkshire, England.  
 \*\* D. E. Potter, Imperial College, London, England.